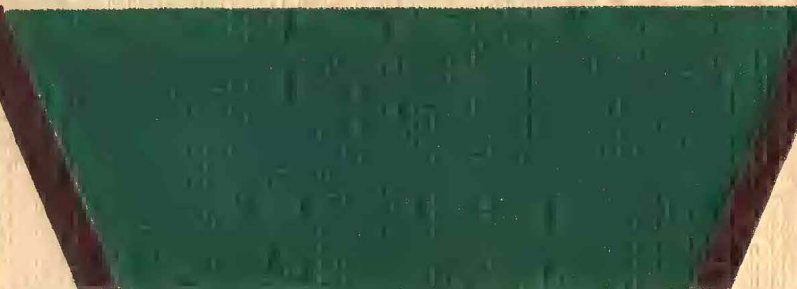
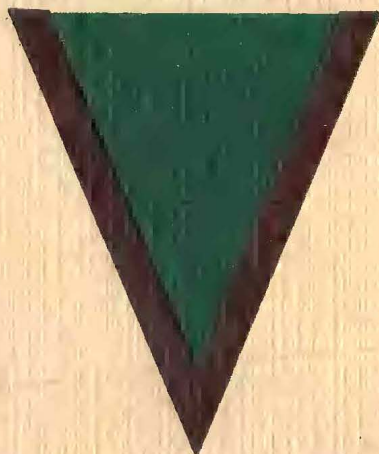


MAILLARD & MILLET

A large, solid green inverted triangle with a dark red border, pointing downwards, located at the top of the page.

GÉOMÉTRIE DESRIPTIVE

A smaller, solid green inverted triangle with a dark red border, pointing downwards, located below the title.

Classe de Mathématiques

LIBRAIRIE HACHETTE

NOUVEAU COURS DE MATHÉMATIQUES

conforme aux programmes de 1957, 1958, 1960, et 1961,

publié sous la direction de M. Roland Maillard.

Inspecteur général de l'Instruction publique.

Classe de Sixième : *Mathématiques*, par R. CAHEN
(Un volume.)

Classe de Cinquième : *Mathématiques*, par R. CAHEN
(Un volume.)

Classe de Quatrième : *Mathématiques*, par R. MAILLARD
et E. CARALP
(Un volume.)

Classe de Troisième : *Mathématiques*, par R. MAILLARD
R. CAHEN et E. CARALP
(Un volume.)

Classes de Seconde A'CMM' : *Mathématiques*, par G. GIRARD
et A. LENTIN
(Un volume.)

Classes de Seconde AB : *Mathématiques*, par R. CAHEN
(Un volume.)

Classes de Première A'CMM' : par G. GIRARD et A. LENTIN
Géométrie (Un volume.) *Algèbre-Trigonométrie* (Un volume.)

COURS DE MATHÉMATIQUES

par

ROLAND MAILLARD

Inspecteur général
de l'Instruction publique.

et ALBERT MILLET

Professeur au Lycée Janson-de Sailly
et à l'E. N. S. E. T.

Classes de Première classique A et B : *Mathématiques*.
Un volume

Classe de Mathématiques :

Algèbre. Un volume.

Géométrie. Un volume.

Arithmétique. Un volume.

Géométrie descriptive. Un volume.

Cosmographie. Un volume.

Mécanique. Un volume.

Trigonométrie. Un volume.

Classe de Philosophie :

Cosmographie. Un volume.

Trigonométrie-Algèbre. Un volume.

Mathématiques (Trigonométrie-Algèbre et Cosmographie) en un volume.

Classe de Sciences expérimentales :

Cosmographie. Un volume.

Mathématiques (moins la Cosmographie). Un volume.

— CLASSIQUES HACHETTE —

ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRÉ

Roland MAILLARD

Inspecteur Général
de l'Instruction publique

Albert MILLET

Professeur au Lycée Janson-de-Sailly
et à l'E. N. S. E. T.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

AVEC 414 EXERCICES ET PROBLÈMES

CLASSE DE MATHÉMATIQUES

Programme du 24 juin 1948.

CLASSIQUES HACHETTE
79, Boulevard Saint-Germain, Paris-VI^e

PROGRAMME DU 24 JUIN 1948

CLASSE DE MATHÉMATIQUES

Géométrie descriptive et Géométrie cotée.

On montrera comment l'emploi de projections auxiliaires, sur des plans verticaux convenablement choisis, permet de résoudre simplement certains problèmes de géométrie cotée.

Représentation du point, de la droite, du plan.

Intersections de droites et de plans.

Droites et plans perpendiculaires.

Changement de plan, rotation autour d'un axe vertical ou de bout, rabattement d'une figure plane. Application aux questions de distances et d'angles.

Représentation de prismes et de pyramides.

Projection horizontale d'un cercle en géométrie cotée. Projections, en géométrie descriptive, d'un cercle situé dans un plan de bout ou vertical.

PRÉFACE

LE présent ouvrage est conforme au programme de la classe de Mathématiques.

La géométrie de Monge et la géométrie cotée ont été exposées séparément. Les tracés ne sont pas toujours les mêmes : par exemple, pour ce qui est des droites et plans perpendiculaires. Ces études séparées conduisent quelquefois à des répétitions, mais est-ce un mal ?

Seul, le chapitre X, sur la projection du cercle, comporte les deux études simultanées. Comme le programme limite l'étude du cercle au cas où son plan est de bout ou vertical, il n'y a pas de différence essentielle entre les deux modes de représentation.

★ ★ ★

Représentation des objets. — Le programme est peu explicite sur les applications. Nous avons cru devoir donner quelques règles de ponctuation et proposer 20 textes d'épures.

La « vision dans l'espace » n'est pas nécessairement un don inné, mais il n'est pas indispensable de « voir dans l'espace » pour effectuer la ponctuation. Au contraire, lorsque par l'application de règles précises la représentation est achevée, la forme du corps apparaît clairement. L'habileté viendra ensuite avec l'habitude.

★ ★ ★

Les figures n'ont pas été réunies dans un volume séparé, mais elles ont été placées dans leur contexte. Nous conseillons à l'élève de suivre d'abord les constructions en lisant le texte, puis de refaire seul sur une feuille de papier, les différents tracés, sans s'aider du texte.

Pour des raisons d'économie, les lignes de rappel n'ont pas été tracées en rouge, mais en traits noirs, très fins. De même, les contours d'ombre n'ont pas été tracés en bleu.

★ ★ ★

Nous considérons que la Géométrie descriptive n'a pas comme seul objet la représentation des corps ; son emploi peut être constructif et conduire à des démonstrations. L'initiation est ingrate,

comme tout « solfège » ; mais, une fois l'outil bien en main, la pratique de la Géométrie descriptive développe les connaissances générales de Géométrie et permet de mieux concevoir les figures de l'espace. En outre, l'exécution correcte d'une épure, par les qualités de soin, de précision, d'habileté qu'elle exige, constitue une excellente discipline de la main et de l'esprit.

★ ★ ★

Comme dans tous les volumes de ce Cours, de nombreux exercices sont proposés à la fin de chaque division de chapitre. Ils permettront aux professeurs de vérifier si les notions simples sont bien comprises et si les méthodes sont bien suivies. D'autres exercices, en fin de chapitre, exigent plus de réflexion et de finesse.

Nous recevrons toujours avec reconnaissance les observations que nos collègues voudront bien nous exprimer. Nous les en remercions par avance.

LES AUTEURS.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

PREMIÈRE PARTIE

GÉOMÉTRIE DE MONGE

CHAPITRE PREMIER

LE POINT — LA DROITE

- 1. *Épure du point.*
- 2. *Épure de la droite.*
- 3. *Problèmes sur la droite.*



ÉPURE DU POINT

■ **1. Représentation de figures dans l'espace.** — Toute figure plane peut être représentée sur une feuille de papier, soit en vraie grandeur, soit en réduction. Il n'en est pas de même pour les figures de l'espace.

Un mode de représentation, dit de *perspective cavalière*, est parfois utilisé. Il permet d'illustrer un raisonnement, de soulager l'esprit en essayant de donner l'illusion visuelle des figures étudiées. Mais il est insuffisant pour obtenir des indications précises sur les dimensions de ces figures et les angles des directions.

On est alors amené à utiliser des modes de représentation qui permettent :

1° de connaître, au moyen d'un dessin dit *épure*, la forme et les dimensions d'une figure de l'espace;

2° de résoudre, soit par des tracés plans, soit par un calcul, des problèmes relatifs à cette figure.

C'est le but de la *géométrie descriptive*.

Deux procédés principaux sont employés :

a) On repère un point M de l'espace à l'aide de ses projections orthogonales sur deux plans rectangulaires.

C'est le procédé de la Géométrie descriptive à deux plans de projection ou *Géométrie de Monge*¹, du nom de son inventeur.

b) On repère un point M de l'espace par rapport à un seul plan à l'aide de sa projection sur le plan et de sa distance au plan.

C'est le procédé de la *Géométrie cotée* (voir *Cours de Géométrie, Première C et M*, chap. VII, p. 102).

Nous étudierons d'abord la Géométrie de Monge et ensuite la Géométrie cotée.

■ **2. Plans de projection.** — Considérons deux plans rectangulaires (H) et (F). On convient de les appeler : **plans de projection**; pour les distinguer, le plan (H) est dit : le **plan horizontal de projection** et le plan (F) est dit : le **plan frontal de projection**.

En général, nous placerons, sur le dessin, le plan (H) dans une position où il paraît physiquement horizontal.

L'intersection xy de ces deux plans est appelée : **la ligne de terre**. Soit M un point de l'espace (fig. 1). Il se projette orthogonalement en m sur (H) et en m_1 sur (F).

Si les trois points M, m , m_1 sont distincts, ils définissent un plan (P). Ce plan, contenant Mm, est perpendiculaire à (H); de même, il est perpendiculaire à (F). Il est donc perpendiculaire à xy qu'il coupe en μ . La figure $\mu m M m_1$ est un rectangle.

Si M est dans (F), il est confondu avec m_1 et le point m est confondu avec μ sur xy . On fera une remarque analogue si M est dans (H). Dans le cas particulier où M est sur xy , les points m , m_1 , μ sont confondus. Dans tous les cas :

→ Les projections orthogonales d'un point sur les plans de projection sont situées dans un même plan perpendiculaire à la ligne de terre.

Réciproquement, soit un plan (P) perpendiculaire à xy en μ . Il coupe (H) suivant une droite (D) perpendiculaire en μ à xy . Prenons sur (D) un point m . De même, le plan (P) coupe (F) suivant une droite (D₁) perpendiculaire en μ à xy ; prenons sur (D₁) un point m_1 . Les perpendiculaires menées par m et m_1 , res-

1. MONGE, géomètre français (1746-1818).

pectivement aux plans (H) et (F), sont situées dans (P) et se coupent en un point M. Les points m et m_1 sont les projections de M.

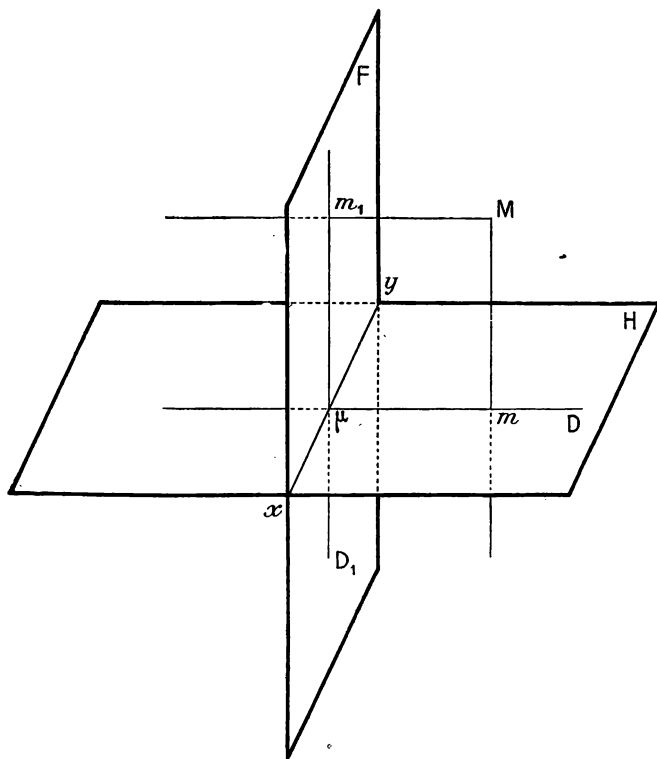


Fig. 1.

Théorème. — Une condition nécessaire et suffisante pour que deux points m et m_1 , situés respectivement dans les plans (H) et (F), soient les projections orthogonales d'un point M de l'espace est qu'ils soient situés dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre.

■ 3. **Dièdres.** — Les deux plans (H) et (F) déterminent quatre dièdres. En supposant que le plan (H) est physiquement horizontal, nous pouvons imaginer qu'un observateur est debout sur lui dans l'un des demi-plans limités par la ligne de terre. Nous dirons qu'il se trouve dans le *premier dièdre*. Nous appellerons alors : *deuxième dièdre*, le dièdre du même côté que le premier par rapport à (H);

troisième dièdre, le dièdre opposé par l'arête au premier; *quatrième dièdre*, le dièdre opposé par l'arête au deuxième.

On notera que l'on peut, théoriquement, numéroté les dièdres en prenant pour premier dièdre n'importe lequel des quatre dièdres et en déduire les autres par le même procédé que celui qui vient d'être énoncé. Comme, en pratique, les corps que nous aurons à représenter seront entièrement dans le premier dièdre, il est commode de considérer que (H) est physiquement horizontal, du moins dans les notions élémentaires. Nous verrons au chapitre IV qu'il n'en est pas toujours ainsi.

Traçons une perpendiculaire au plan (F) (fig. 2). Orientons cette perpendiculaire de façon qu'un mobile la décrivant dans le sens positif traverse le plan (F) en passant du 2^e dièdre au 1^{er} dièdre ou du 3^e au 4^e. Orientons de même toute perpendiculaire à (H), de façon qu'un mobile la décrivant dans le sens positif traverse le plan (H) en passant du 4^e dièdre au 1^{er} ou du 3^e au 2^e.

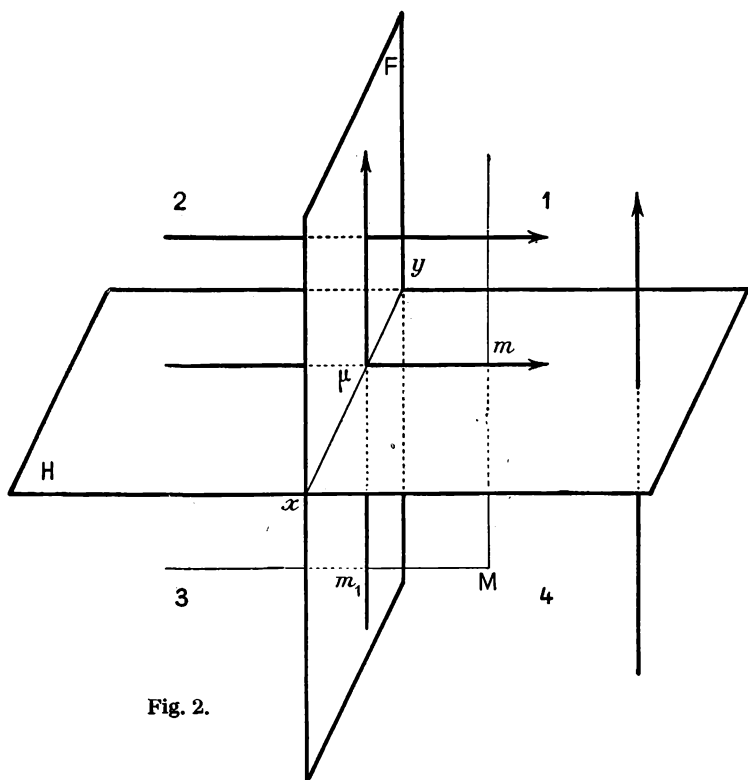


Fig. 2.

Choisissons, enfin, une unité de longueur. Dans le plan $\mu m M m_1$ perpendiculaire en μ à xy , il est alors possible de repérer le point M par les mesures algébriques $\overline{\mu m}$ et $\overline{\mu m_1}$ respectives des vecteurs $\overrightarrow{\mu m}$ et $\overrightarrow{\mu m_1}$ sur les axes ainsi définis.

Définitions. ● Le nombre relatif $\overline{\mu m}$ s'appelle l'**éloignement** du point M.

● Le nombre relatif $\overline{\mu m_1}$ s'appelle la **cote** du point M.

Tout point M est défini par la position du point μ sur xy et par la donnée de son éloignement et de sa cote.

Les signes de ces deux nombres sont évidents.

dièdres	1	2	3	4
éloignement	+	—	—	+
cote	+	+	—	—

Tout point d'éloignement nul est dans (F);

tout point de cote nulle est dans (H).

■ 4. Épure du point. — Soit un point M de l'espace qui se projette en m et m_1 respectivement sur les plans (H) et (F).

Imaginons que l'on fasse subir au plan (F) une rotation (R) d'un angle droit, autour de xy , dans un sens tel que les points de (F) de cotes positives viennent en des points de (H) d'éloignements négatifs (fig. 3).

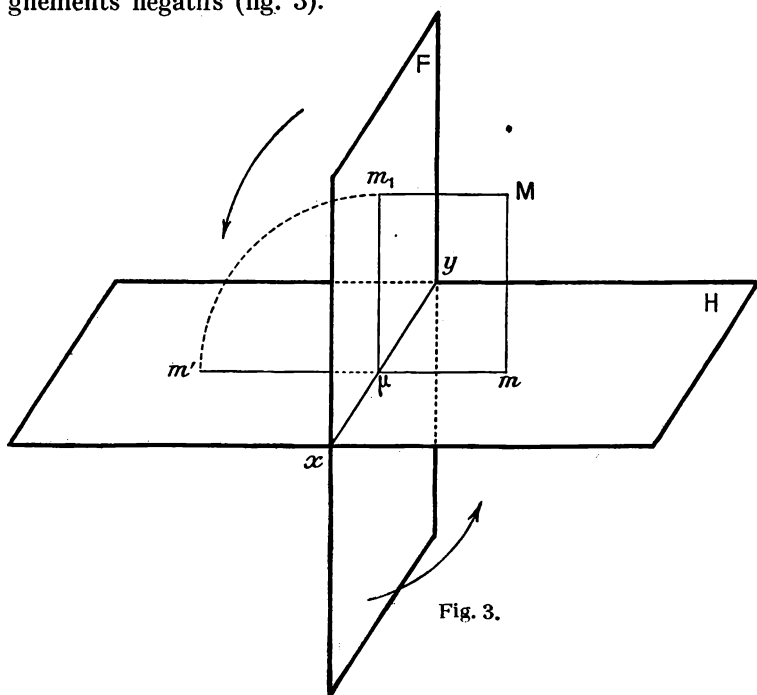


Fig. 3.

Dans cette rotation, la droite μm_1 reste perpendiculaire à xy en μ et le point m_1 vient en m' sur la droite μm , à la distance : $\mu m' = \mu m_1$. On obtient sur le plan horizontal un dessin que l'on appelle : **épure du point M** (fig. 4).

Définitions. ● Le point m est appelé **projection horizontale** du point M.

● Le point m' est appelé **projection frontale** du point M.

● Toute droite du dessin, perpendiculaire à xy , est appelée **ligne de rappel**.

Nous pouvons donc dire :

→ Les projections horizontale et frontale d'un point sont sur une même ligne de rappel.

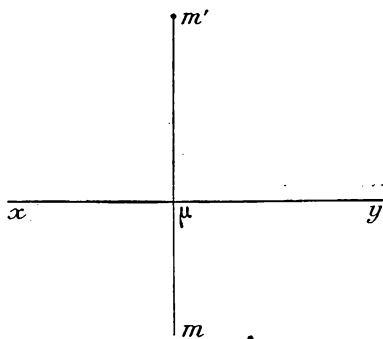


Fig. 4.

Réciproquement, plaçons sur une épure, deux points m et m' sur une même ligne de rappel et cherchons s'il existe un point M dont ils sont les projections. Par la rotation inverse de la rotation (R), la droite $\mu m'$, qui reste perpendiculaire à xy , vient en μm_1 . On reconstitue alors la figure n° 1. Les points m et m_1 satisfont aux con-

ditions du théorème du § 2. Ils définissent un point M.

Nous énoncerons :

Théorème. — La condition nécessaire et suffisante pour que deux points m et m' d'une épure puissent être considérés comme projections horizontale et frontale d'un point M de l'espace est qu'ils soient situés sur la même ligne de rappel.

Conventions d'écriture. ● Les deux projections d'un point sont toujours indiquées par une même lettre minuscule. La projection horizontale d'un point M est notée m . La projection frontale est notée par la même lettre primée m' .

● Un point M de l'espace se désigne sur une épure par l'écriture : (m, m') .

■ 5. Aspects de l'épure du point. — Tous les points ayant des éloignements positifs ont des projections horizontales, sur l'épure, situées d'un même côté de xy .

Les projections horizontales des points qui ont des éloignements négatifs sont de l'autre côté. On ferait des remarques analogues pour les cotes (fig. 5).

La figure 6 indique les épures de points des différents dièdres.

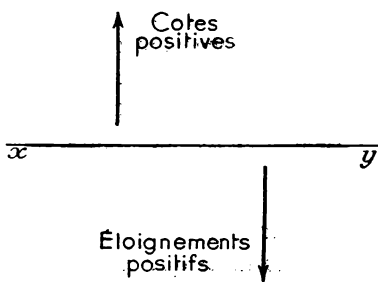


Fig. 5.

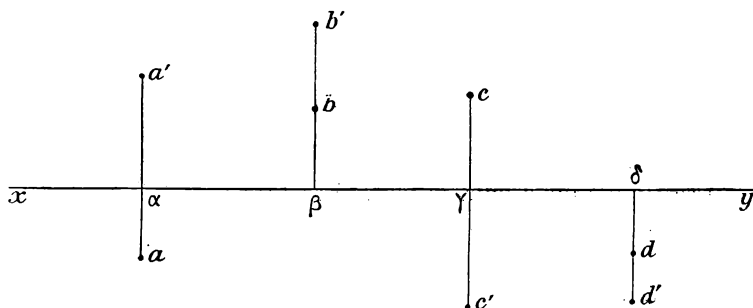


Fig. 6.

A est dans
le 1^{er} dièdre

B est dans
le 2^e dièdre

C est dans
le 3^e dièdre

D est dans
le 4^e dièdre.

La figure 7 indique les épures de points situés dans (H) ou dans (F).

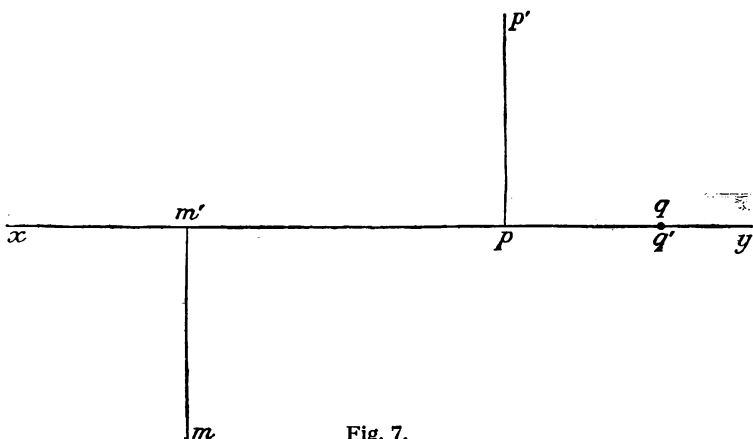


Fig. 7.

M est dans le
plan horizontal de projection

P est dans le
plan frontal de projection

Q est sur la
ligne de terre.

On remarquera sur ces épures l'importance de la convention relative à l'accentuation de la lettre qui représente la projection frontale. Sans l'application de cette convention, il serait impossible de distinguer un point du 1^{er} dièdre d'un point du 3^e dièdre ni de distinguer les deux projections d'un point du 2^e dièdre (ou du 4^e dièdre).

■ **6. Plans bissecteurs.** — Les projections m et m' ne peuvent être confondues que dans deux cas.

1^o m et m' sont confondues en un point de xy .

Le point M est sur la ligne de terre.

2^o m et m' sont confondues, mais ne sont pas sur la ligne de terre.

Le point M est alors dans le 2^e dièdre ou dans le 4^e.

La relation $\mu m = \mu m'$ montre que M est équidistant des plans (H) et (F).

Il se trouve donc dans le plan bissecteur des 2^e et 4^e dièdres.

Ce plan s'appelle le **second bissecteur**.

Le plan bissecteur des 1^{er} et 3^e dièdres s'appelle le **premier bissecteur**.

Tout point de ce plan ayant un éloignement et une cote de même signe et de même valeur absolue, aura des projections symétriques par rapport à la ligne de terre.

La ligne de terre appartient aux deux bissecteurs.

La figure 8 indique les épures de points situés dans les bissecteurs.

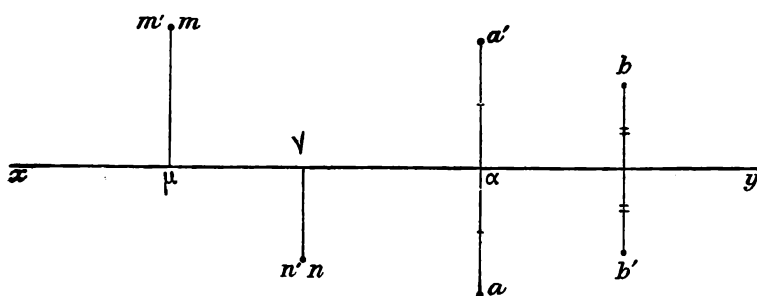


Fig. 8.

M et N sont dans
le 2^e bissecteur

A et B sont dans
le 1^{er} bissecteur

EXERCICES

N. B. — Dans les épures faites au tableau noir, les lignes de rappel s'indiquent par un trait fin ou par un trait interrompu.

Dans les épures faites sur une feuille de papier, les lignes de rappel s'indiquent par un trait rouge, plein, fin.

(Pour des raisons typographiques, les lignes de rappel sont figurées, dans cet ouvrage, en noir très fin.)

1. — Placer sur une épure les points suivants, donnés par leur cote et leur éloignement. Dire à quels dièdres ils appartiennent. (Si l'on fait l'épure sur une feuille de papier, on prendra le cm pour unité de longueur et on espacera les lignes de rappel de 1 cm.)

Points :	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Éloignements :	+ 3	— 5	+ 2	— 4	— 3	+ 3	0	— 5	0
Cotes :	+ 4	— 4	— 3	+ 2	— 3	— 3	+ 4	0	0

2. — Reconnaître sur l'épure (fig. 9) les points plus rapprochés du plan horizontal que du plan frontal et les points situés dans l'un des plans de projection.

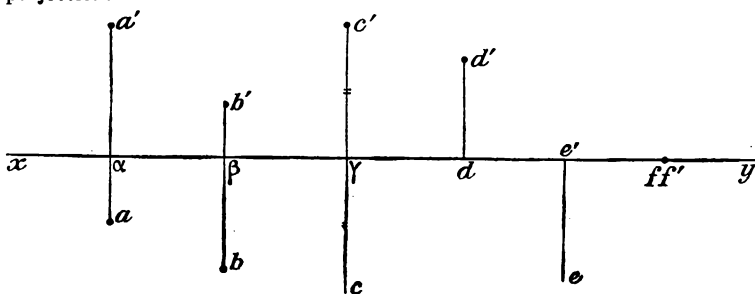


Fig. 9.

3. — Examiner l'épure (fig. 10) en faisant toutes les remarques sur les positions des points : dièdre, positions par rapport aux plans de projections et aux plans bissecteurs.

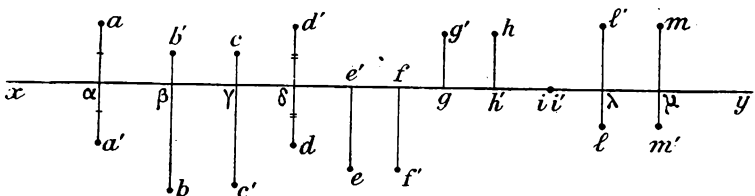


Fig. 10.

4. — Faire l'épure d'un point situé dans le 1^{er} dièdre :

1^o plus près de (H) que de (F) ;

2^o plus près de (F) que de (H).

Mêmes questions pour un point du 2^e dièdre, du 3^e dièdre, du 4^e dièdre.

5. — L'épure d'un point étant donnée, trouver l'épure de son symétrique :

1^o par rapport au plan (H) ;

2^o par rapport au plan (F) ;

3^o par rapport à la ligne de terre.

2

ÉPURE DE
LA DROITE

■ 7. Rappel de propriétés. — On a établi, en étudiant la géométrie dans l'espace¹, les propriétés suivantes :

- 1° deux points distincts déterminent une droite et une seule;
- 2° si une droite n'est pas perpendiculaire à un plan, sa projection orthogonale sur ce plan est une droite;
- 3° si une droite est perpendiculaire à un plan, tous les points de cette droite ont même projection orthogonale sur ce plan.

■ 8. Projections d'une droite. — La figure 11 montre l'épure de deux points A et B. La droite AB qui les joint n'est pas perpendiculaire au plan horizontal de projection puisque a et b sont distincts. Sa projection horizontale est donc une droite qui passe par a et par b ; c'est la droite ab .

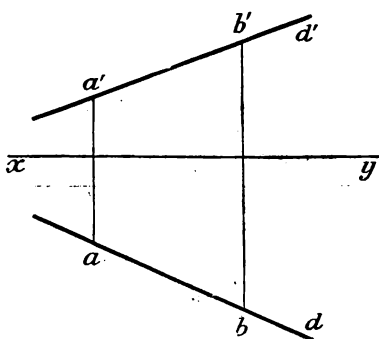


Fig. 11.

La droite AB n'est pas perpendiculaire au plan frontal de projection puisque a' et b' sont distincts. Sa projection frontale est la droite $a' b'$.

La droite AB n'est pas perpendiculaire au plan frontal de projection puisque a' et b' sont distincts. Sa projection frontale est la droite $a' b'$.

- Les deux projections d'une droite sont, dans le cas général, des droites.

Réciproquement, traçons, sur l'épure, deux droites : l'une (d), l'autre (d'), aucune d'elles n'étant perpendiculaire à xy . Cherchons s'il est possible qu'elles soient la projection horizontale et la projection frontale d'une droite (D) de l'espace. Marquons sur (d) un point a et sur (d') un point a' de façon que a et a' soient sur une ligne de rappel. Nous définissons un point A de l'espace. Nous pouvons faire les mêmes opérations pour définir un autre point B(b, b'). La droite AB répond à la question.

C'est la seule. En effet, une droite ayant (d) pour projection horizontale est située dans le plan (P) perpendiculaire, suivant (d),

au plan horizontal de projection. De même, une droite ayant (d') pour projection frontale est située dans le plan (Q) perpendiculaire au plan frontal de projection, suivant la droite (d_1), déduite de (d') par la rotation autour de xy qui sert à refaire la figure de l'espace à partir de l'épure. Ces plans (P) et (Q) ne sont ni parallèles ni confondus; ils se coupent suivant une droite qui est la droite AB.

Nous énoncerons :

Théorème. — Une droite de l'espace est déterminée, d'une manière unique, par la donnée de ses deux projections, pourvu qu'aucune d'elles ne soit perpendiculaire à la ligne de terre.

■ 9. **Cas d'exception.** — En examinant les différentes particularités que peuvent présenter les projections de deux points A et B, nous allons étudier tous les cas d'exception réservés dans l'énoncé du théorème précédent.

1° **Droite verticale.** — Prenons deux points A et B tels que les projections a et b soient confondues. Les projections a' et b' sont sur une même ligne de rappel. Puisque a et b sont confondues, la droite AB est perpendiculaire au plan horizontal de projection. Sa projection horizontale est un point : a , par exemple. Sa projection frontale est $a'b'$, perpendiculaire à xy .

Réciproquement, considérons une droite perpendiculaire au plan horizontal de projection et marquons deux points A et B sur elle. Ils ont même projection horizontale et leurs projections frontales sont sur une même ligne de rappel. La projection horizontale de la droite est un point et sa projection frontale est une droite qui coïncide avec la ligne de rappel de ce point (fig. 12).

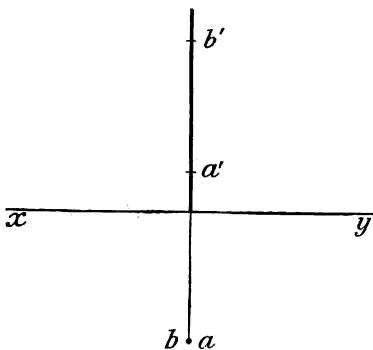


Fig. 12.
Droite verticale.

Définition. On appelle **droite verticale** (ou simplement **verticale**) une droite perpendiculaire au plan horizontal de projection.

Nous énoncerons :

→ La projection horizontale d'une verticale est un point; sa projection frontale est une droite qui coïncide avec la ligne de rappel de ce point.

2° **Droite de bout.** — Il est possible que les deux projections

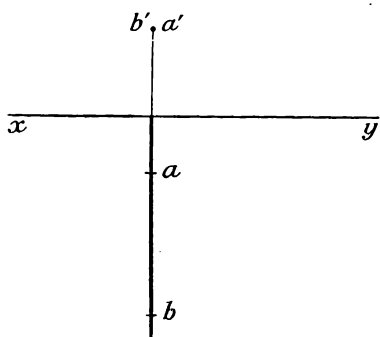


Fig. 13.
Droite de bout.

frontales a' et b' des points A et B soient confondues. En raisonnant de la même façon que précédemment, on montre que la droite AB est perpendiculaire au plan frontal de projection et que, réciproquement, si une droite est perpendiculaire au plan frontal de projection, sa projection frontale est un point et sa projection horizontale est une droite qui coïncide

avec la ligne de rappel de ce point (fig. 13).

Définition. On appelle **droite de bout**¹ une droite perpendiculaire au plan frontal de projection.

Nous énoncerons :

→ La projection frontale d'une droite de bout est un point; sa projection horizontale coïncide avec la ligne de rappel de ce point.

3° **Droite de profil.** — Il est possible que les deux lignes de rappel aa' et bb' soient confondues (fig. 14). Les points A et B sont alors dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre. Les deux projections ab et $a'b'$ de la droite AB sont portées par une même ligne de rappel. La droite AB, située dans un plan perpendiculaire à xy , est elle-même perpendiculaire à xy .

Définitions. ● Un plan perpendiculaire à la ligne de terre est dit : **plan de profil**.

● Une droite perpendiculaire à la ligne de terre est dite : **droite de profil**.

1. Une telle droite est ainsi nommée parce qu'elle est supposée vue par le bout. On écrit donc *de bout* en deux mots et non pas *debout*.

Les droites verticales et les droites de bout sont des droites de profil particulières.

Si l'on se donne sur l'épure deux droites (d) et (d') confon-

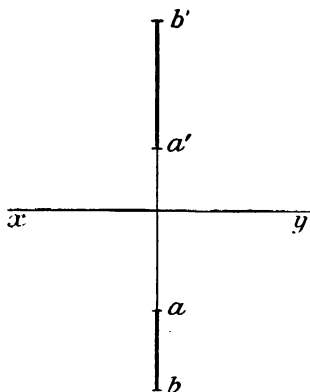


Fig. 14.

Droite de profil.

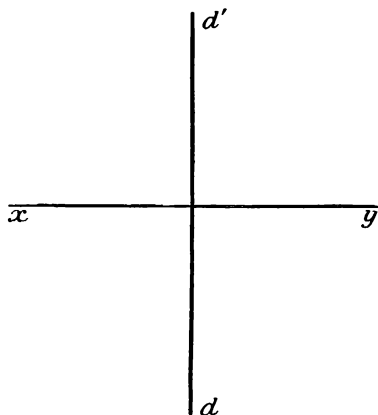


Fig. 15.

dues suivant une ligne de rappel (fig. 15), elles peuvent représenter une infinité de droites de profil : toutes les droites du plan de profil perpendiculaire au plan horizontal de projection suivant d . Pour en déterminer une, il suffira de marquer les projections (a, a') et (b, b') de deux points : on aura défini, alors la droite AB.

→ Les projections d'une droite de profil sont confondues suivant une ligne de rappel.

Une droite de profil n'est pas déterminée par ses projections; elle l'est par les projections de deux de ses points.

d et d' sont aussi les projections de toute figure du plan de profil.

Nous noterons que si, l'une des projections d'une droite est perpendiculaire à la ligne de terre, il est nécessaire que l'autre projection soit confondue avec la première ou réduite à un point.

■ 10. **Droites remarquables.** — Les différentes droites : verticales, de bout, de profil constituent les seuls cas d'*exception* réservés dans l'énoncé du théorème du § 8.

Nous allons maintenant étudier des droites qui, sans être exceptionnelles, sont remarquables par leurs *positions particulières*.

Définitions.

● On appelle **horizontale** une droite parallèle au plan horizontal de projection.

● On appelle **frontale** une droite parallèle au plan frontal de projection.

On dit aussi *droite de front* au lieu de frontale.

Une droite de bout est une horizontale particulière; une droite verticale est une frontale particulière.

1° Horizontale. — Tous les points ont même cote. La projection frontale est donc parallèle à xy (fig. 16).

→ Un segment AB d'une horizontale se projette horizontalement en vraie grandeur : $ab = AB$.

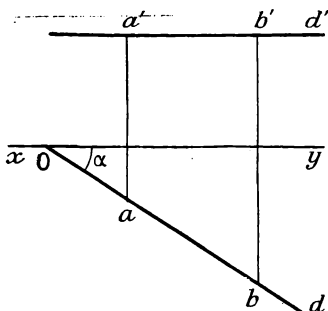


Fig. 16.

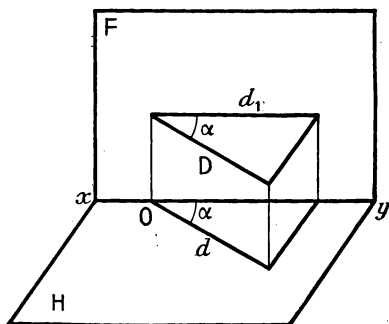


Fig. 17.

Droite horizontale.

Si l'on fait la figure dans l'espace (fig. 17) montrant la projection horizontale (d) de (D) et sa projection frontale (d_1), on constate que l'angle aigu α de (D) et de (d_1) est l'angle de (D) et du plan (F). Or cet angle se projette sur (H) en vraie grandeur.

→ L'angle d'une droite horizontale (d, d') avec le plan frontal de projection est indiqué sur l'épure par l'angle α de (d) et de la ligne de terre.

2° Frontale. — Tous les points ont même éloignement.

La projection horizontale est donc parallèle à xy (fig. 18).

→ Un segment AB d'une frontale se projette frontalement en vraie grandeur : $a'b' = AB$.

→ L'angle d'une droite frontale (d, d') avec le plan horizontal de projection est indiqué sur l'épure par l'angle β de (d') et de la ligne de terre.

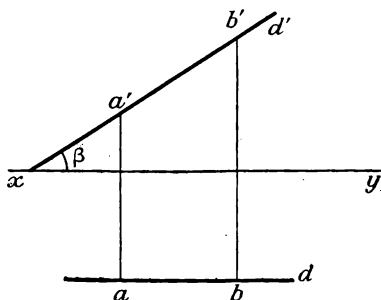


Fig. 18.
Droite frontale.

• **REMARQUE.** — Une droite parallèle à xy , est, à la fois, horizontale et frontale.

On l'appelle *droite parallèle à la ligne de terre*. Ses projections sont parallèles à xy .

Un segment d'une telle droite se projette en vraie grandeur sur les deux plans de projection.

La figure 19 rassemble les divers cas que nous venons d'exposer. On trouvera, dans la partie supérieure, la figure dans l'espace et, dans la partie inférieure, l'épure correspondante.

On verra, ultérieurement, d'autres positions particulières de droites.

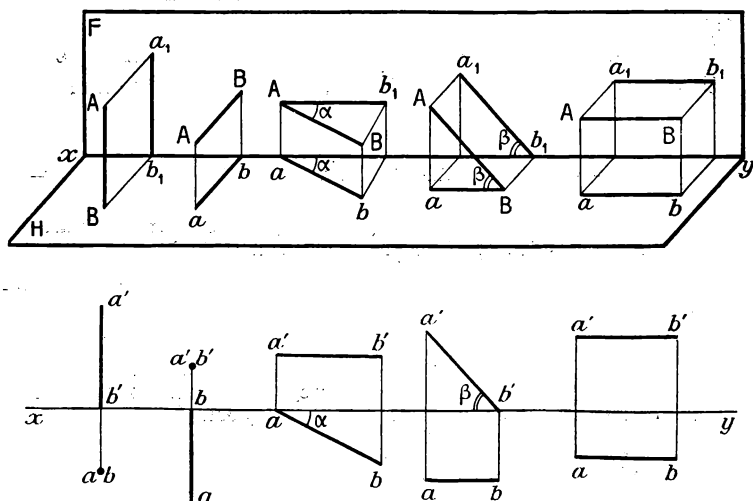


Fig. 19.

verticale; de bout; horizontale; frontale; parallèle à la ligne de terre.

■ **11. Propriétés projectives.** — Nous venons de voir, dans certains cas particuliers, que la longueur d'un segment, l'angle d'une droite et d'un plan, s'évaluent sur une projection.

Il est important de noter ces propriétés au passage, car on sait bien qu'elles ne sont pas valables dans le cas général.

Il existe, en revanche, des propriétés qui sont applicables dans tous les cas et que les projections permettent d'obtenir sans opérations nouvelles.

Elles ont été signalées dans le *Cours de Géométrie, classes de Première C et M*, chap. VI.

Nous rappellerons que si des segments AB, BC, CD sont portés par la même droite, orientée dans un sens arbitraire, ils se projettent sur un plan suivant des segments *ab*, *bc*, *cd* portés par la projection de la droite sur le plan et l'on a :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{ab}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{cd}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{cd}}.$$

En particulier, *le milieu d'un segment se projette au milieu de la projection et réciproquement.*

Si quatre points alignés forment une division harmonique, leurs projections forment aussi une division harmonique et réciproquement.

Il n'y a exception que pour la projection horizontale d'une verticale et pour la projection frontale d'une droite de bout.

EXERCICES

6. — Dans quels cas deux droites (*d*) et (*d'*), données sur une épure, ne peuvent-elles être les deux projections d'une même droite?

7. — Tracer le segment de droite AB déterminé par A (cote 5 cm, éloignement 4 cm) et B (cote 3, éloignement 6). Les lignes de rappel *aa'* et *bb'* sont distinctes. Trouver la cote et l'éloignement du milieu M du segment.

8. — Faire l'épure d'un segment de droite horizontale de cote 4 cm dont la projection horizontale a 6 cm et la projection frontale 4 cm. Rechercher sur l'épure les éléments qui sont en vraie grandeur.

Mêmes questions pour un segment frontal d'éloignement 4 cm, dont la vraie grandeur est 6 cm et la projection horizontale 4 cm.

9. — Représenter une horizontale de cote 2 cm qui fait 60° avec le plan frontal de projection.

10. — Représenter une frontale d'éloignement 2 cm qui fait 30° avec le plan horizontal de projection.

11. — Un segment horizontal a une projection horizontale double de sa projection frontale. Calculer l'angle qu'il fait avec le plan frontal.

12. — On donne les deux projections d'une droite, non de profil. Marquer sur cette droite :

un point de cote donnée;

un point d'éloignement donné;

un point dont la cote est égale à l'éloignement.

13. — Déterminer, sur une horizontale donnée, un point dont on connaît la distance à la ligne de terre.

3

PROBLÈMES
SUR LA DROITE

■ 12. Problème. — On donne les projections d'une droite. Construire un point M de cette droite, connaissant sa projection horizontale m (fig. 20).

La projection m est marquée sur la projection horizontale (d) de la droite. La projection frontale m' se trouve sur la projection frontale (d') de la droite et sur la ligne de rappel $m\mu$ du point m .

Ces deux droites se coupent en m' . Le problème est résolu. Il y a exception si la droite est de profil.

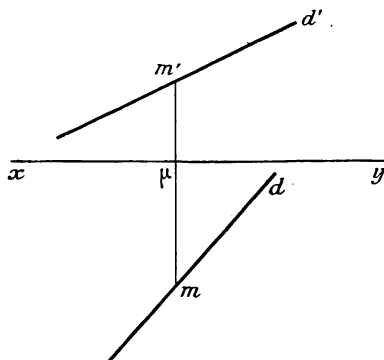


Fig. 20.

1° La droite est *verticale*. Le point m est nécessairement en d , le point m' est indéterminé sur (d') (fig. 21);

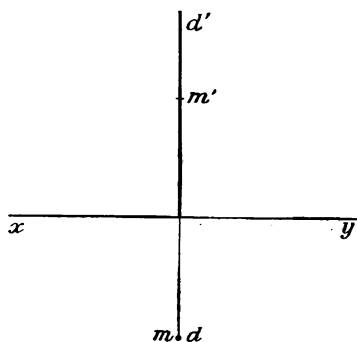


Fig. 21.

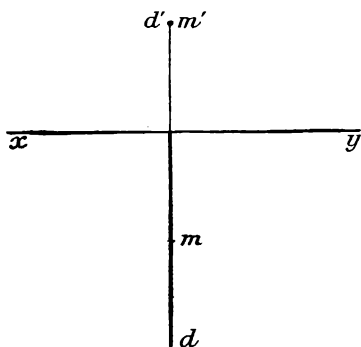


Fig. 22.

2° la droite est *de bout*. Le point m étant choisi arbitrairement sur (d), le point m' est nécessairement en d' (fig. 22);

3° la droite est *de profil* (ni verticale, ni de bout). Nous la déterminerons par deux points $A(a, a')$ et $B(b, b')$. Marquons m .

La construction générale échoue puisque (d') et la ligne de rappel de m sont confondues. Nous noterons, alors, que le rapport $\frac{\overline{ma}}{\overline{mb}}$ est égal au rapport $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ des vecteurs $\vec{MA}$ et $\vec{MB}$ de l'espace.

Il s'agit donc de trouver le point m' tel que l'on ait : $\frac{\overline{m'a'}}{\overline{m'b'}} = \frac{\overline{ma}}{\overline{mb}}$.

Pour cela, menons par a et par a' deux droites quelconques qui se coupent sur l'épure en α (fig. 23). Par b nous menons la parallèle à $a\alpha$ et par b' la parallèle à $a'\alpha$. Les deux droites obtenues se coupent en β . Traçons $\alpha\beta$. Il suffit alors de mener par m la parallèle à $a\alpha$ jusqu'en p sur $\alpha\beta$, puis par p la parallèle à $a'\alpha$ jusqu'en m' sur $a'b'$. Le point m' est le point cherché, car l'on a :

$$\frac{\overline{m'a'}}{\overline{m'b'}} = \frac{\overline{p\alpha}}{\overline{p\beta}} = \frac{\overline{ma}}{\overline{mb}}.$$

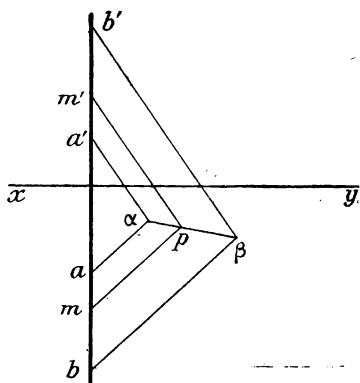


Fig. 23.

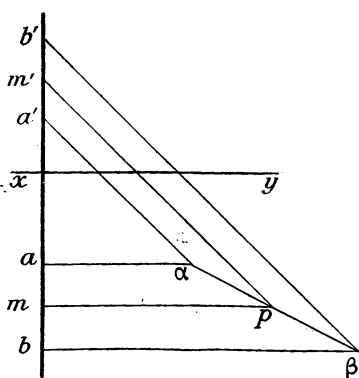


Fig. 24.

En pratique, à cause de l'utilisation du té et de l'équerre à 45° , on peut prendre pour direction de $a\alpha$ la direction de xy et pour direction de $a'\alpha$ la direction faisant 45° avec xy (fig. 24). Le résultat est indépendant des directions choisies. On peut choisir aussi des directions faisant chacune 45° avec xy dans des sens différents.

Si l'on connaît le rapport $\frac{\overline{ma}}{\overline{mb}}$, la construction se simplifie.

Par exemple, si m est le milieu de ab , m' sera le milieu de $a'b'$.

■ 13. Traces d'une droite. — On appelle **traces** d'une droite ses points de rencontre avec les plans de projection.

On distingue la trace *horizontale*, située dans le plan horizontal de projection et la trace *frontale*, située dans le plan frontal de projection.

● **Problème.** — Trouver, sur l'épure, les traces d'une droite.

Soit (d, d') une droite (fig. 25).
Sa trace horizontale a une cote nulle. Sa projection frontale h' est donc sur xy et sur (d') . On en déduit la projection horizontale h par une ligne de rappel.

La trace frontale a un éloignement nul. Sa projection horizontale f est donc sur (d) et sur xy . On en déduit la projection frontale f' , par une ligne de rappel.

Les traces cherchées sont : (h, h') et (f, f') .

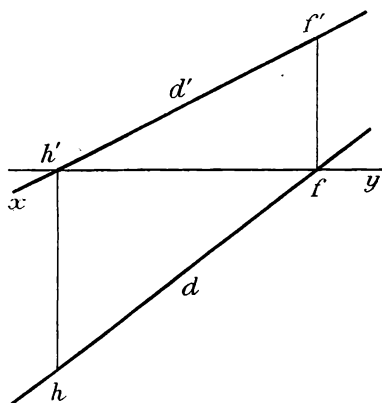


Fig. 25.

Si la droite (d, d') est horizontale, sa trace horizontale est rejetée à l'infini

Si la droite (d, d') est frontale, sa trace frontale est rejetée à l'infini.

Si la droite (d, d') est parallèle à xy , elle n'a plus de traces.

La construction est en défaut si la droite est de profil.

Soit donc une droite de profil définie par deux points (a, a') et (b, b') . Nous connaissons toujours la projection frontale h' de la trace horizontale et la projection horizontale f de la trace frontale. Ces points h' et f sont au point de rencontre, sur l'épure, de xy et de la ligne de rappel aa' .

Nous sommes alors ramenés au problème étudié au n° 12. Menons donc par a et b des

droites parallèles (à xy par exemple) et par a' et b' deux autres

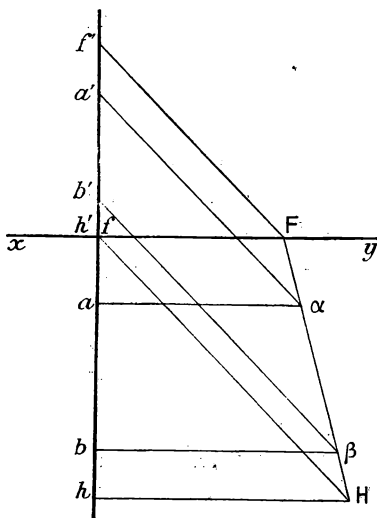


Fig. 26.

droites parallèles (faisant 45° avec xy , par exemple). On en déduit, sur l'épure, la droite $\alpha\beta$ (fig. 26).

Pour obtenir h , menons $h'H$ parallèle à $a'\alpha$ jusqu'en H sur $\alpha\beta$ puis, par H , la parallèle Hh à $a\alpha$ jusqu'en h sur ab .

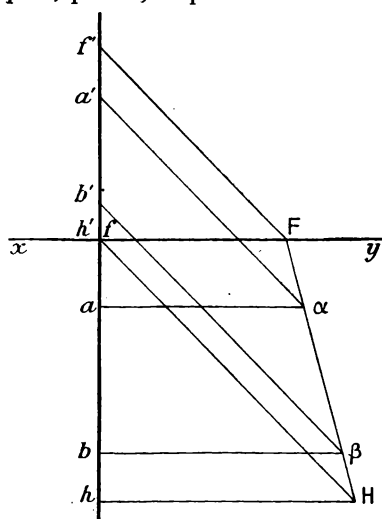


Fig. 26.

Pour obtenir f' , menons fF parallèle à $a\alpha$ jusqu'en F sur $\alpha\beta$ puis, par F , la parallèle Ff' à $a'\alpha$ jusqu'en f' sur $a'b'$,

Les traces cherchées sont : (h, h') et (f, f') .

■ 14. Ponctuation d'une droite. — On peut compléter la représentation d'une figure en distinguant les parties vues et les parties cachées.

On dit que l'on *ponctue* la représentation.

A cet effet, on considère :

1° que les plans de projection sont opaques;

2° que la projection horizontale est regardée par un observateur placé au-dessus du plan horizontal de projection aussi loin de ce plan que l'on voudra, du côté des cotes positives.

3° que la projection frontale est regardée par un observateur placé en avant du plan frontal de projection, aussi loin que l'on voudra de ce plan frontal du côté des éloignements positifs.

On en conclut alors que :

- En projection horizontale, un point est vu ou caché suivant que sa cote est positive ou négative.
- En projection frontale, un point est vu ou caché suivant que son éloignement est positif ou négatif.

On dessine :

les parties vues en traits pleins ———

et les parties cachées en points ronds, serrés, équidistants

Les parties cachées sont aussi dessinées en traits fins, courts, interrompus -----, principalement quand il s'agit d'un dessin industriel.

EXEMPLES. — I. Ponctuer la droite (d, d') (fig. 27).

On détermine les traces (h, h') et (f, f') de cette droite.

La trace horizontale (h, h') divise la droite en deux parties : la demi-droite ($ha, h'a'$) et la demi-droite ($hb, h'b'$). Les points de la première ont des cotes positives, ceux de la seconde ont des cotes négatives. On tracera donc ha en trait plein et hb en points ronds.

La trace frontale (f, f') divise la droite en deux parties : la demi-droite ($fa, f'a'$) et la demi-droite ($fb, f'b'$). Les points de la première ont des éloignements négatifs, ceux de la seconde ont des éloignements positifs. On tracera donc $f'b'$ en trait plein et $f'a'$ en points ronds.

II. Ponctuer l'horizontale (d, d').

On détermine la trace frontale (f, f') de cette droite (fig. 28).

Tous les points de la droite ont des cotes positives. En projection horizontale, toute la projection (d) est vue.

La trace frontale (f, f') partage la droite en deux demi-droites. En raisonnant comme à l'exemple précédent, on obtient la ponctuation marquée sur la figure 28.

III. Ponctuer une droite de profil.

Soit une droite de profil définie par sa trace horizontale (h, h') et par sa trace frontale (f, f') (fig. 29).

Tous les points du segment FH ont des cotes et des éloignements positifs. Sur les deux projections les portions fh et $f'h'$ sont donc vues. On obtient la ponctuation indiquée sur la figure 29.

■ 15. Droites parallèles. —

1° Deux verticales sont parallèles; deux droites de bout sont parallèles.

2° Soit (D) et (Δ) deux droites parallèles (ni verticales ni de bout). On a démontré, en géométrie dans l'espace¹, que deux

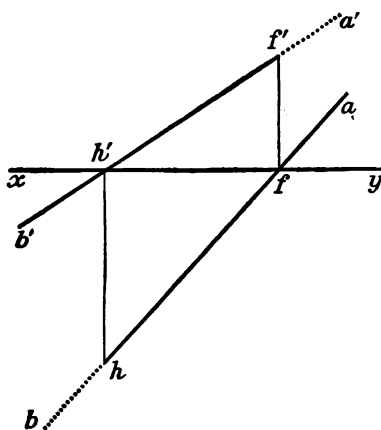


Fig. 27.

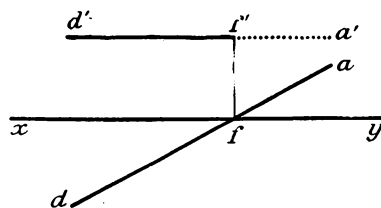


Fig. 28.

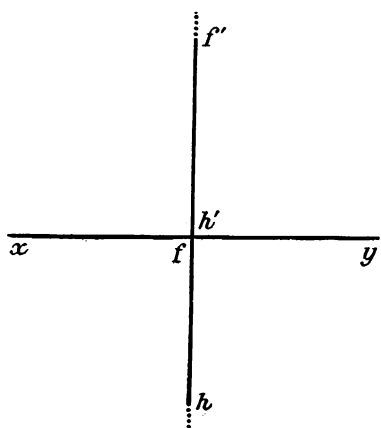


Fig. 29.

1. *Géométrie*, cl. de Première C et M, chap. vi.

droites parallèles, non perpendiculaires à un plan de projection, se projettent orthogonalement suivant deux droites parallèles ou confondues.

Donc les projections horizontales (d) et (δ) sont parallèles (ou confondues), les projections frontales (d') et (δ') sont parallèles (ou confondues).

(Si les droites ne sont pas deux droites parallèles d'un même plan de profil, il est impossible que (d) et (δ) soient confondues et que (d') et (δ') soient aussi confondues puisque les droites (D) et (Δ) sont distinctes.)

Réciproquement, donnons-nous sur une épure (fig. 30) deux droites (d, d') et (δ, δ') dont les projections de même nom sont parallèles. Prenons sur (δ, δ') un point (m, m'). La parallèle à (D) menée par M aura pour projections les parallèles à (d) et (d') menées respectivement par m et m' . On obtient la droite (δ, δ').

Le raisonnement suppose que les droites sont définies par leurs deux projections; il ne s'applique donc pas à des droites de profil.

Nous énoncerons :

Théorème. — La condition nécessaire et suffisante pour que
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{deux droites, non de profil, soient parallèles} \\ \text{projections de même nom soient parallèles (ou confondues} \\ \text{pour une seule projection).} \end{array} \right.$

■ **16. Problème.** — *Mener par un point donné M la parallèle à une droite donnée (D).*

1° Si la droite donnée (D) n'est pas de profil, il suffit de mener, par les projections m et m' du point M , des droites (δ) et (δ') respectivement parallèles aux projections de même nom de (D) (fig. 30).

2° Si la droite (D) est de profil, supposons-la déterminée par deux de ses points $A(a, a')$ et $B(b, b')$. Menons par M le vecteur $\overrightarrow{MC}$ équipollent au vecteur $\overrightarrow{AB}$. Les projections de $\overrightarrow{MC}$ seront équipollentes aux projections de même nom du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Nous mènerons donc : $\overrightarrow{mc} = \overrightarrow{ab}$ et $\overrightarrow{m'c'} = \overrightarrow{a'b'}$.

La droite cherchée est la droite de profil définie par les points (m, m') et (c, c') (fig. 33).

La construction est applicable si M est dans le plan de profil de la droite AB .

■ 17. **Droites concourantes.** — Deux droites non parallèles, situées dans un même plan, sont concourantes. Leur point

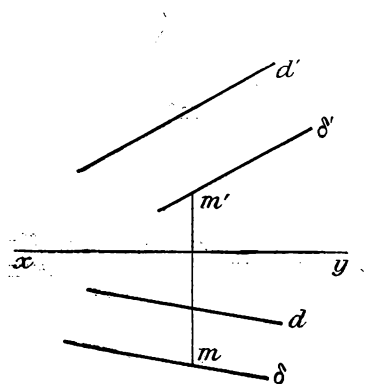


Fig. 30.

Droites parallèles
non de profil.

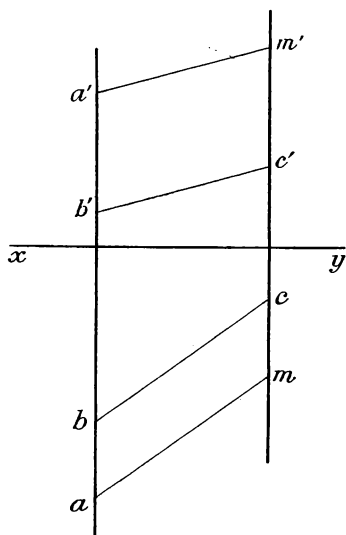


Fig. 33.

Droites parallèles
de profil.

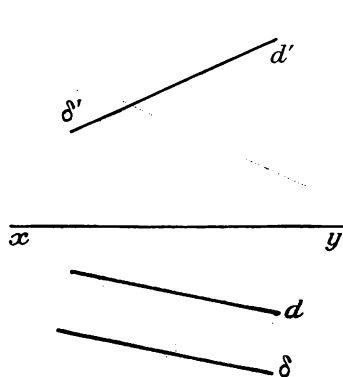


Fig. 31.

Droites parallèles
d'un même plan de bout.

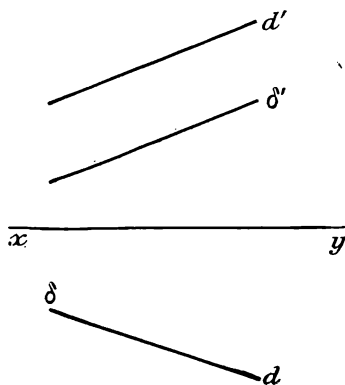


Fig. 32.

Droites parallèles
d'un même plan vertical.

commun a une projection horizontale commune aux deux projections horizontales des droites et une projection frontale commune aux deux projections frontales des droites (fig. 34).

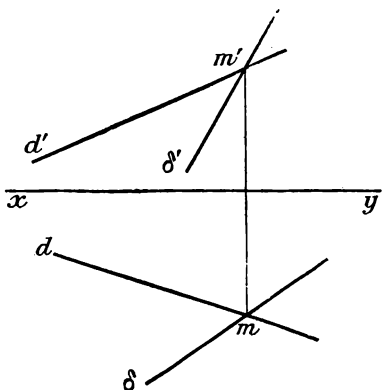


Fig. 34.

Réciproquement, si les projections de même nom de deux droites se coupent sur une même ligne de rappel, en m pour les projections horizontales, en m' pour les projections frontales, les deux droites sont concourantes en $M(m, m')$.

Le raisonnement suppose qu'aucune des deux droites n'est de profil. Nous énoncerons :

Théorème. — Pour que deux droites, dont aucune n'est de profil, soient concourantes, il faut et il suffit que leurs projections de même nom aient des points communs situés sur une même ligne de rappel.

EXEMPLES. — I. Les droites (d, d') et (δ, δ') de l'épure 35 sont-elles concourantes?

Les projections horizontales sont confondues. Les projections frontales se coupent en m' et la ligne de rappel de m' coupe d en m . Le point (m, m') est commun aux deux droites.

On ferait un raisonnement analogue sur l'épure 36.

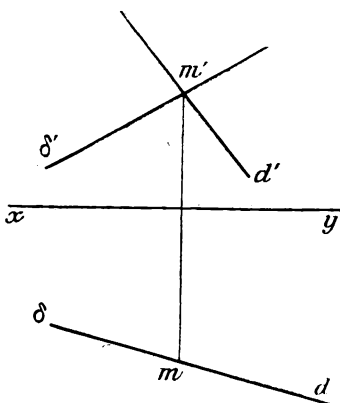


Fig. 35.

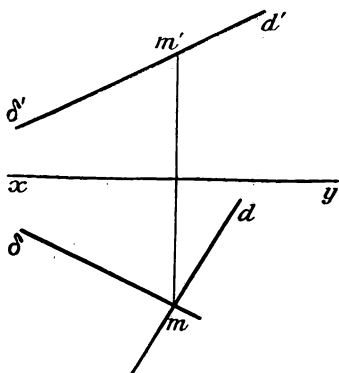


Fig. 36.

II. On donne deux droites, dont l'une est de profil. Sont-elles concourantes?

Soit la droite (d, d') et la droite de profil $(ab, a'b')$. La droite (d, d') coupe le plan de profil de la droite AB en un point (m, m') . Il s'agit de savoir si ce point est sur la droite AB. Si oui, les deux droites se coupent en ce point; sinon, elles ne se coupent pas.

Nous utiliserons le procédé exposé au n° 12 qui nous permet de trouver la projection frontale du point de la droite AB qui est projeté horizontalement en m (fig. 37).

Nous trouvons, sur le dessin, que cette projection m' n'est pas confondue avec m' .

Les droites données ne se coupent pas.

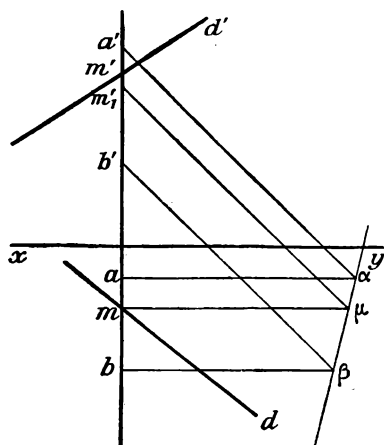


Fig. 37.

III. Trouver le point commun à deux droites d'un même plan de profil (fig. 38).

Soit les droites de profil $(ab, a'b')$ et $(cd, c'd')$.

En effectuant sur ces droites les constructions déjà expliquées (n° 12), on obtient pour la droite AB la droite $\alpha\beta$ et pour la droite CD la droite $\gamma\delta$. Les droites $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ se coupent en un point μ qui, par les constructions inverses, fournit le point commun (m, m') .

Si les droites $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ étaient parallèles, les droites données AB et CD auraient été parallèles.

■ 18. Cas où les projections ne se coupent pas dans les limites de l'épure. —

Dans les exemples précédents, nous avons bénéficié d'une circonstance favorable : les projections de même nom se coupaient dans les limites de l'épure. Nous allons étudier, sur des exemples, quelques cas où cela ne se produit pas.

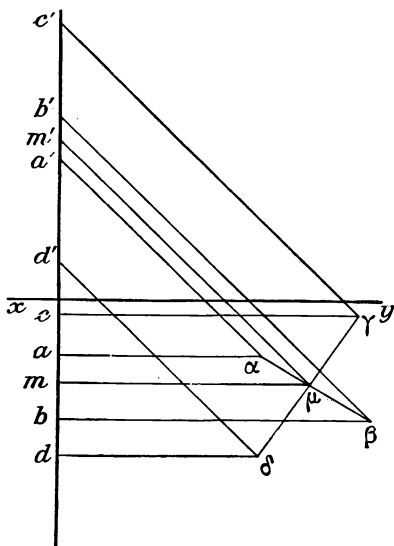


Fig. 38.

EXEMPLES. — I. Les droites (d, d') et (δ, δ') de l'épure 39 sont-elles concourantes?

Il suffit de remarquer que le point commun à (d) et (δ) est assez loin à gauche. Il ne peut donc pas être sur la même ligne de rappel que le point commun à (d') et (δ') qui est assez loin à droite.

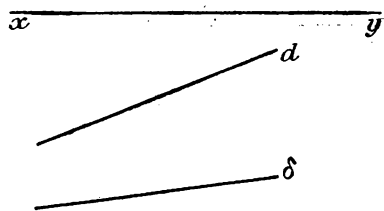
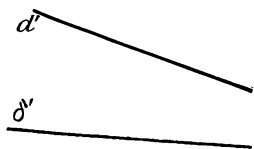


Fig. 39.

Sans faire de construction, nous concluons que les deux droites données n'ont pas de point commun.

II. Les droites (d, d') , (δ, δ') de l'épure 40 sont-elles concourantes?

Nous ne pouvons pas dire à la seule inspection de l'épure si les droites se coupent. Comme elles ne sont pas parallèles, si elles sont dans un même plan, elles se coupent et réciproquement.

On remarque alors que si les droites portant respectivement des segments AB et CE sont concourantes, elles définissent un plan qui contient AE et BC et, réciproquement, si AE et BC définissent un plan, les droites AB et CE sont aussi

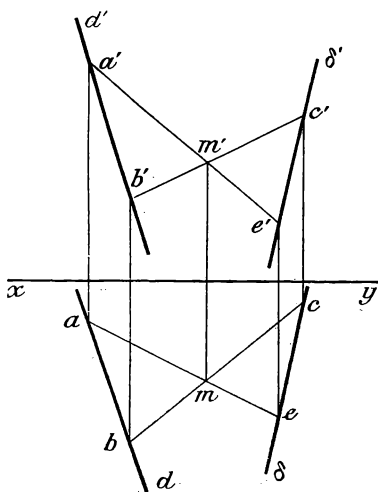


Fig. 40.

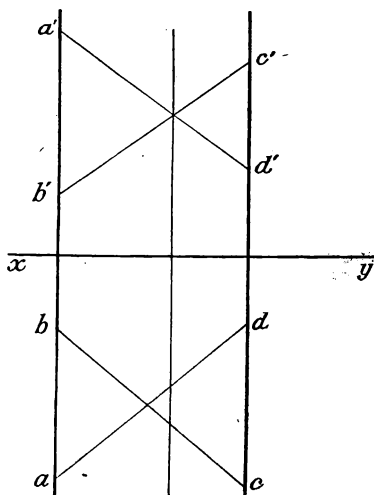


Fig. 41.

dans ce plan. Il suffit de faire en sorte que l'on puisse reconnaître sur l'épure que AE et BC sont dans un même plan.

Sur l'épure, les droites AE et BC se coupent en M (m, m') . Les droites (d, d') et (δ, δ') sont donc dans un même plan.

La méthode est applicable au cas où l'une des droites est de profil. Elle peut servir aussi pour reconnaître si deux droites de profil, non

situées dans le même plan de profil, sont parallèles : il faut et il suffit, pour qu'il en soit ainsi, qu'elles soient dans un même plan. Sur l'épure 41, on reconnaît que les droites de profil AB et CD ne sont pas parallèles.

● REMARQUES. — I. Nous savons reconnaître, dans tous les cas, si deux droites sont parallèles ou concourantes, donc si deux droites quelconques représentées dans une épure sont dans un même plan.

Par conséquent, nous savons également représenter deux droites non situées dans un même plan (Épures 42 et 43).

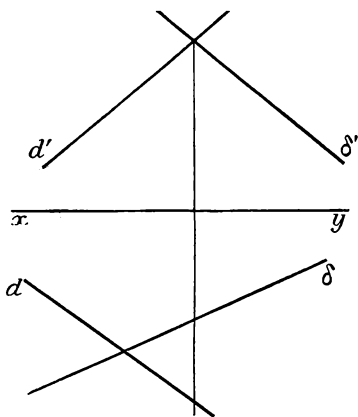


Fig. 42.

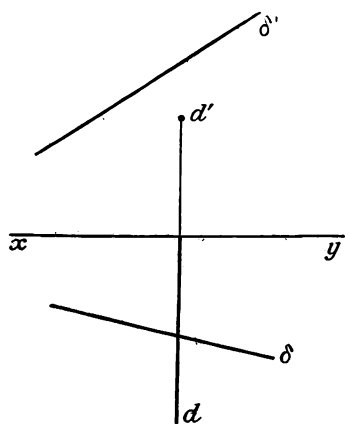


Fig. 43.

II. Les questions qui viennent d'être traitées se ramènent à des vérifications graphiques. Ces vérifications ne seront exactes qu'aux erreurs de dessin près. Par exemple, il peut arriver que trois points paraissent alignés. C'est souvent pour des raisons d'ordre géométrique que l'on conclura, sûrement, à la réalité d'un fait. Si la vérification graphique, alors, ne se fait pas, il faudra corriger l'épure qui n'a pas été exécutée avec assez de précision.

■ 19. Distance de deux points. Angles d'une droite avec les plans de projection. — Lorsqu'un segment AB est horizontal, nous avons vu (n° 10) que sa longueur et l'angle que fait la droite AB avec le plan frontal de projection se trouvent immédiatement sur l'épure (fig. 44).

On a : $AB = ab$

et l'angle aigu de AB et du plan frontal est : $\alpha = (ab, xy)$.

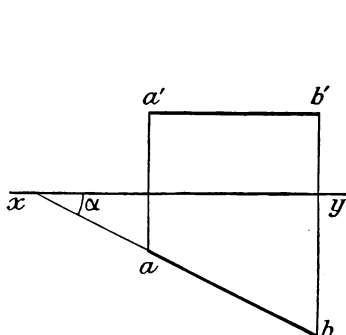


Fig. 44.

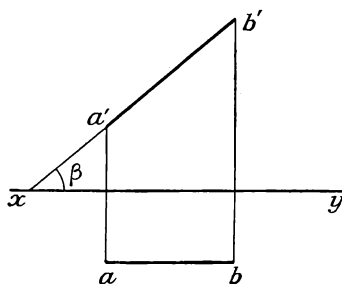


Fig. 45.

De même lorsqu'un segment AB est frontal, l'épure donne (fig. 45) $AB = a'b'$

et l'angle aigu de AB et du plan horizontal est $\beta = (a'b', xy)$.

Examinons le cas général et faisons une figure dans l'espace (fig. 46). Soit (H) le plan horizontal de projection et AB un segment; appelons a et b les projections horizontales respectives de A et de B.

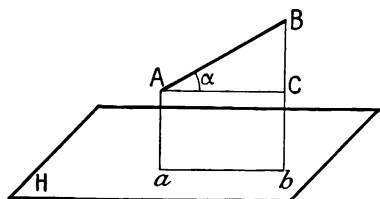


Fig. 46.

Menons par A la parallèle à ab jusqu'en C sur Bb .

Pour connaître AB, il suffit de connaître AC et BC. Or :

$$AC = ab \text{ et } BC = |\overline{bB} - \overline{bC}| = |\overline{bB} - \overline{aA}|.$$

C'est-à-dire que BC est la valeur absolue de la différence des cotes de A et B.

→ La distance de deux points est égale à l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit la distance des projections horizontales des deux points et la valeur absolue de la différence de leurs cotes.

Nous remarquons, enfin, que l'angle α de AB et du plan (H) est l'angle aigu $\widehat{CAB}$ du triangle rectangle CAB ou de tout triangle qui lui est égal.

• **EXEMPLE.** — On donne le segment AB par ses projections ($ab, a'b'$). Déterminer la distance AB et l'angle α que fait la droite AB avec le plan horizontal de projection (fig. 47).

Menons par a' la parallèle à xy . Elle coupe la ligne de rappel de (b, b') en h' . Portons sur $a'h'$, dans un sens ou dans l'autre, la longueur :

$$h'a'_1 = ab.$$

Nous constituons ainsi un triangle rectangle $b'h'a'_1$, donc les côtés de l'angle droit sont :

$$h'a'_1 = ab \quad \text{et} \quad b'h' = \text{différence des cotes de A et de B.}$$

$$\text{On a donc :} \quad AB = b'a'_1 \quad \text{et} \quad \alpha = \widehat{b'a'_1h'}.$$

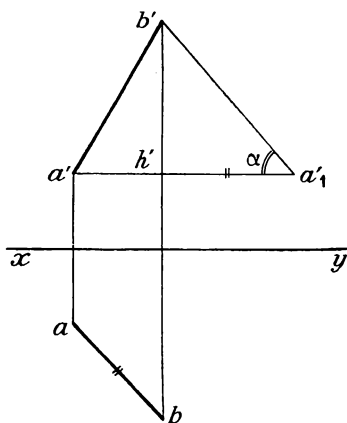


Fig. 47.

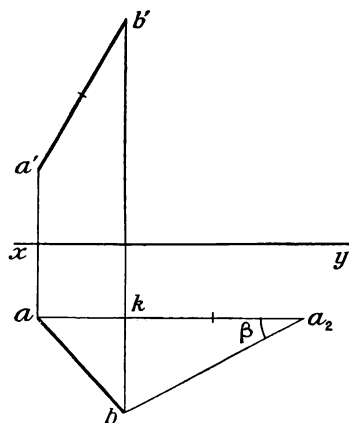


Fig. 48.

En intervertissant les rôles du plan horizontal et du plan frontal, on obtient de la même façon que :

→ La distance de deux points est égale à l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit la distance des projections frontales des deux points et la valeur absolue de la différence des éloignements.

La connaissance de ce triangle rectangle fournit également l'angle aigu β que fait la droite qui joint les deux points avec le plan frontal de projection.

EXEMPLE. — On donne le segment AB par ses projections $(ab, a'b')$. Déterminer la distance AB et l'angle β que fait la droite AB avec le plan frontal de projection (fig. 48).

La parallèle à xy menée par a coupe la ligne de rappel de (b, b') en k . Portons sur ak la longueur $ka_2 = a'b'$. Les côtés de l'angle droit du triangle rectangle bka_2 sont :

$$ka_2 = a'b' \quad \text{et} \quad kb = \text{différence des éloignements de A et de B.}$$

$$\text{On a donc :} \quad AB = ba_2 \quad \text{et} \quad \beta = \widehat{ba_2k}.$$

● REMARQUES. — I. La construction est applicable à un segment de profil.

II. La construction n'exige que des tracés de droites parallèles ou perpendiculaires à xy , donc des tracés commodes à exécuter à l'aide du té et de l'équerre.

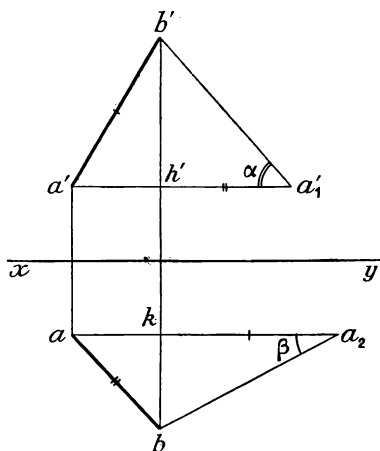


Fig. 49.

Sur la figure 49, on a déterminé α et β . Les longueurs $b'a_1$ et ba_2 sont égales puisqu'elles valent AB .

■ 20. Ombre d'un point sur les plans de projection. —

On considère, parfois, que les corps représentés par une épure sont opaques et éclairés par une source lumineuse.

Lorsque cette source lumineuse est à distance finie, on considère qu'elle est réduite

à un point. On dit alors qu'il s'agit d'une *ombre au flambeau*.

Lorsque cette source lumineuse est à l'infini, on dit qu'il s'agit d'une *ombre au soleil*.

Dans le premier cas, les rayons lumineux émanent d'un point L qui représente la source lumineuse (ou flambeau). Dans le deuxième cas, ils sont parallèles à une direction donnée.

Nous étudierons, pour l'instant, les ombres que des figures, formées de points et de droites, portent sur les plans de projection.

1° **Ombre au flambeau.** — Soit L le point lumineux. Joignons LA . Si la droite obtenue coupe le plan de projection (P) en B tel que A soit entre L et B , le point B est l'ombre du point A sur le plan (P) (fig. 50).

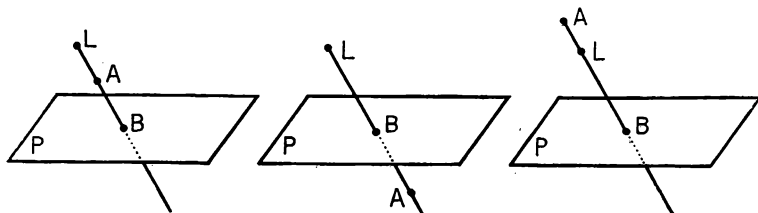


Fig. 50.

A porte ombre en B sur (P).

A ne porte pas ombre sur (P).

2° Ombre au soleil. — Menons par A la parallèle à la direction des rayons lumineux. Si la droite obtenue coupe le plan (P) en un point B tel que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ ait le même sens que les rayons lumineux, le point B est l'ombre de A sur (P) (fig. 51).

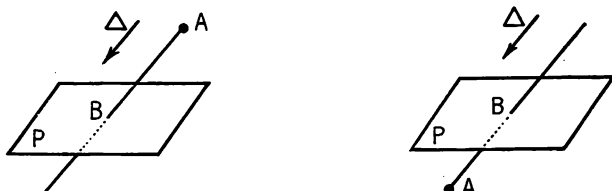


Fig. 51.

A porte ombre en B sur (P).

A ne porte pas ombre sur (P).

EXEMPLE. — Déterminer l'ombre portée sur les plans de projection opaques par le point A (a, a') en supposant :

1° qu'il est éclairé par le point (l, l') (fig. 52);

2° qu'il est éclairé par des rayons parallèles (δ, δ') (fig. 53).

1° Sur l'épure 52, la trace horizontale de la droite AL est le point (b, b') et la trace frontale est (c, c'). Le point A est entre L et B. Il n'est pas entre L et C. Donc le point A porte ombre en B sur le plan horizontal de projection.

2° Sur l'épure 53, la parallèle à (δ, δ') menée par (a, a') a pour trace horizontale le point (b, b') et pour trace frontale le point (c, c').

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont le sens des rayons lumineux, mais le point C est entre A et B. Le point A porte donc ombre sur le plan frontal en C. Il ne pourrait porter ombre en B sur le plan horizontal que si le plan frontal n'existait pas (ou était transparent).

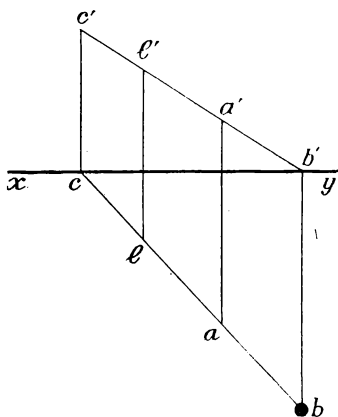


Fig. 52.

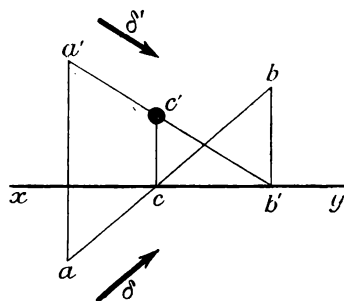


Fig. 53.

Dans les applications (architecture, dessins de machines), on suppose presque toujours que les rayons lumineux sont parallèles et ont la direction et le sens indiqués sur la figure 54.

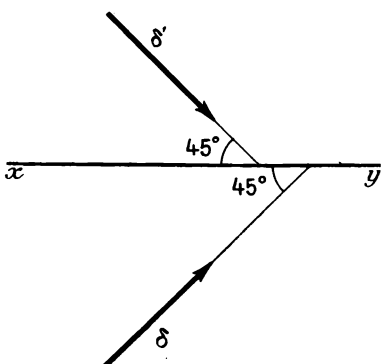


Fig. 54.

■ 21. Ombre d'une droite sur les plans de projection. — L'ombre portée par un segment de droite AB est le lieu des ombres portées par ses différents points M. Or les rayons lumineux, passant par M, engendrent une portion de plan (π). L'ombre portée par AB sur un plan (P) est l'intersection de la portion de plan (π) et du plan (P). C'est donc

un segment de droite. Il suffira donc de chercher les ombres portées par A et par B.

EXEMPLES. — I. Déterminer l'ombre portée par le segment de droite AB supposé éclairé par le point lumineux L (fig. 55).

Les traces horizontales des droites LA et LB sont respectivement (a_1, a'_1) et (b_1, b'_1). Le segment de droite AB porte ombre entièrement sur le plan horizontal selon le segment a_1b_1 .

II. Déterminer l'ombre portée par le segment de droite AB supposé éclairé par des rayons lumineux (δ, δ') (fig. 56).

Nous trouvons que le point A porte ombre sur le plan horizontal en a_1 et que le point B porte ombre sur le plan frontal en b'_2 . Mais on ne doit pas joindre a_1 et b'_2 parce que ces points représentent des ombres portées sur des plans différents.

Si le plan frontal n'existait pas (ou était transparent), le segment AB porterait ombre sur le plan horizontal suivant le segment a_1b_1 joignant les ombres des points A et B sur ce plan. Traçons a_1b_1 . La droite obtenue coupe xy en γ . Ce point γ est l'ombre d'un point (c, c') de AB. Ceci démontre que la portion AC porte ombre sur le plan horizontal et que la portion CB porte ombre sur le plan frontal.

L'ombre cherchée, sur les plans opaques de projection, est donc la ligne brisée $a_1\gamma b'_2$.

III. Déterminer l'ombre portée par le triangle ABC supposé éclairé par des rayons lumineux (δ, δ') (fig. 57).

On détermine les ombres portées respectivement par les trois côtés du triangle. On trouve, sur l'épure, que le côté AC porte ombre sur le plan horizontal suivant a_1c_1 . Si le plan frontal n'existait pas, le point B porterait ombre sur le plan horizontal en b_1 , et l'ombre du triangle serait formée par l'intérieur du triangle $a_1b_1c_1$. En réalité, le

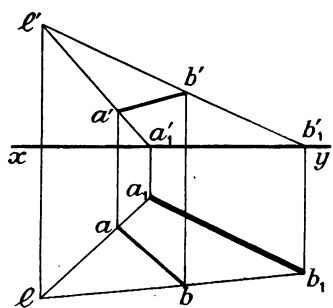


Fig. 55.

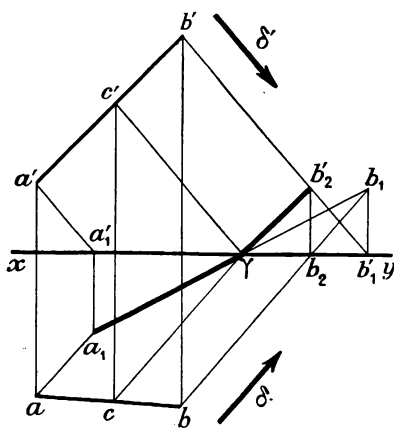


Fig. 56.

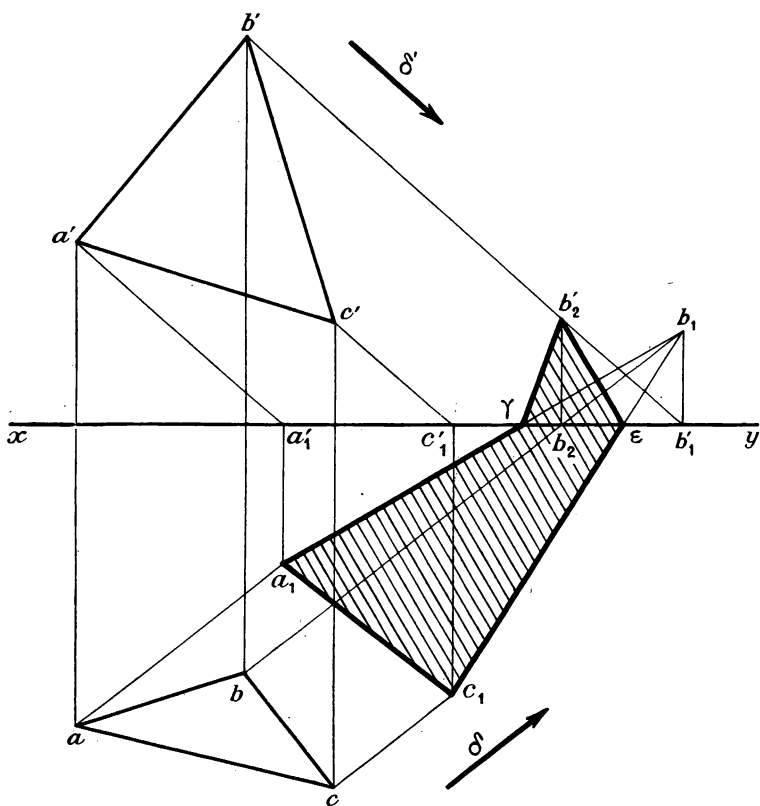


Fig. 57.

point B porte ombre sur le plan frontal en b'_2 . L'ombre du côté AB est donc la ligne brisée $a_1 \gamma b'_2$ et l'ombre du côté CD est la ligne brisée $c_1 \epsilon b'_2$.

L'ombre cherchée a été couverte de hachures.

Sur une épure, les hachures sont tracées en bleu.

EXERCICES

14. — Représenter la droite joignant les points A et B.

A : cote 2 cm, éloignement 3 cm.

B : cote — 1 cm, éloignement — 3 cm.

Les lignes de rappel de A et B sont distantes de 5 cm.

Déterminer les traces de la droite et ponctuer. Construire la longueur AB.

Déterminer les angles de AB avec les plans de projection.

15. — Même question pour :

A : cote 2 cm; éloignement — 1 cm.

B : cote — 1 cm; éloignement 3 cm.

Même écartement des lignes de rappel.

16. — Mener par un point (a, a') une horizontale rencontrant une droite donnée (d, d') . Cas où la droite (d, d') est de profil.

17. — Deux droites (D) et (Δ) ne sont pas dans un même plan. Construire une droite verticale qui les rencontre.

18. — On donne un segment de profil $(ab, a'b')$. Placer la projection frontale d'un point du segment connaissant sa projection horizontale. Déterminer la longueur du segment et les angles qu'il fait avec les plans de projection.

19. — Construire une horizontale de cote donnée rencontrant deux droites données.

20. — Mener par un point (a, a') une droite rencontrant deux droites données dont l'une est verticale.

21. — Trouver un point d'une droite (d, d') dont la cote soit triple de l'éloignement et, plus généralement, dont le rapport de la cote à l'éloignement soit un nombre donné.

22. — Déterminer la projection horizontale d'un segment AB, connaissant les projections a et a' de A, la projection frontale b' de B (on prendra $a'b' = 3$ cm) et sa longueur $AB = 5$ cm.

23. — Déterminer la projection horizontale d'une droite, connaissant les projections a et a' d'un point de la droite, la projection frontale de la droite et l'angle (60°) que fait la droite avec le plan frontal.

24. — Par un point donné (a, a') mener une droite horizontale faisant 30° avec une droite horizontale (h, h') .

25. — 1° Marquer les projections d'un point (m, m') pour que ce point soit situé dans le deuxième plan bissecteur. En déduire les projections de la trace d'une droite donnée (d, d') sur le deuxième plan bissecteur.

2° Marquer les projections d'un point (p, p') pour que ce point soit situé dans le premier plan bissecteur. En déduire les projections de la trace d'une droite donnée (d, d') sur le premier plan bissecteur.

26. — 1° Démontrer que la projection d'un parallélogramme est, en général, un parallélogramme. Dans la suite de l'exercice, on reste dans le cas général.
2° On donne la projection horizontale d'un parallélogramme et les projections frontales des droites qui portent deux côtés opposés. Acheter la construction du parallélogramme.

3° On donne la projection horizontale d'un parallélogramme et les projections frontales des droites qui portent deux côtés consécutifs. Acheter la construction du parallélogramme lorsqu'elle est possible.

NOTE SUR LES ÉPURES

Format. — Les épures qui seront proposées peuvent être exécutées sur une feuille de format 25×17 . Si l'on désire une épure plus petite, on multipliera les données par 0,7 et on prendra un format 17×13 . Si l'on désire une épure plus grande, on multipliera les données par 1,5 et on prendra un format 35×25 .

Papier. — On utilisera du papier à dessin. Le bon côté de la feuille est celui où se lit le nom de la marque.

Instruments. — Une planche à dessin;

— un té, une règle plate, un double décimètre;

— deux équerres (une à 60° , une à 45°);

— un crayon dur, un crayon tendre, une plume à dessin;

— un compas (à pointes sèches, au crayon et à l'encre); un tire-ligne;

— des flacons d'encre de Chine (noire, rouge, bleue).

On prendra bien soin, après usage, de nettoyer les pointes du compas et du tire-ligne en les essuyant avec un chiffon puis en les frottant à la peau de chamois.

L'encre de Chine rouge devra être étendue d'un volume égal d'eau.

Mise en place. — On fixe la feuille, par des bandes de papier gommé, de façon que les bords de la feuille soient approximativement parallèles aux côtés de la planche.

On détermine le centre O de la feuille par le point de rencontre des diagonales.

On trace ensuite les axes de la feuille :

Oy , petit axe,
orienté positivement vers la droite;

Ox , grand axe,
orienté positivement vers le bas;

Oz , grand axe,
orienté positivement vers le haut.

Données. — Les données seront exprimées, généralement, en mm. Elles sont rapportées au système d'axes Ox , Oy , Oz ci-dessus.

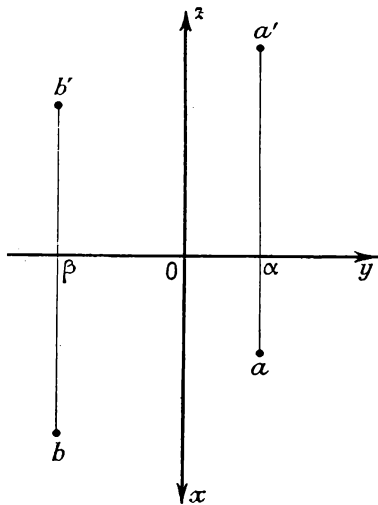
x donne l'éloignement,

z donne la cote,

y indique la position de la ligne de rappel. Par exemple, on donne (en mm)

A : $x = 13$; $y = 10$; $z = 28$; donc $\overline{O\alpha} = 10$; $\overline{\alpha a} = 13$; $\overline{\alpha a'} = 28$

B : $x = 24$; $y = -17$; $z = 20$; donc $\overline{O\beta} = -17$; $\overline{\beta b} = 24$; $\overline{\beta b'} = 20$.



Constructions. — Elles sont faites au crayon.

Les lignes de rappel sont tracées avec le té que l'on fait glisser sur le petit côté de la planche.

Les parallèles à la ligne de terre Oy sont tracées à l'aide de l'équerre que l'on fait glisser sur le té immobilisé.

(Il est préférable, en effet, de ne pas utiliser le té sur deux côtés consécutifs de la planche, dont l'orthogonalité n'est pas garantie.)

Tracé définitif. — L'épure étant terminée au crayon, on repasse entièrement ensuite à l'encre.

Les lignes de rappel sont tracées à l'encre rouge : traits pleins et fins ———.

Les parties vues de la figure à représenter sont tracées à l'encre noire : traits pleins, pas trop gros $\left(\frac{1}{4} \text{ de mm environ} \right)$ ———.

Les parties cachées sont marquées par des points noirs, ronds, régulièrement espacés que l'on trace à la plume ou par des traits fins, courts, interrompus -----.

Les contours d'ombre sont tracés en bleu : pleins, fins pour les contours vus; ronds ou courts et espacés régulièrement pour les contours cachés.

Les parties vues de l'ombre sont recouvertes de hachures fines, équidistantes, bleues (équidistance 1 mm).

EXERCICES SUR LE CHAPITRE PREMIER

27. — 1° On donne les projections ab et $a'b'$ d'un segment AB . Marquer les projections du point M de ce segment connaissant le rapport $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k$.

Cas où $k = -1$.

2° On donne les projections de trois droites dont l'une (D) est verticale. Tracer une droite (Δ) rencontrant ces trois droites en trois points A, B, C tels que le point de rencontre A de (D) et de (Δ) soit le milieu du segment BC limité par les deux autres.

28. — On donne les projections de deux droites (d, d') et (δ, δ') non situées dans un même plan, aucune d'elles n'étant horizontale.

1° Une horizontale (h, h') coupe (D) en $A(a, a')$ et coupe (Δ) en $B(b, b')$. Par A on mène la parallèle (G) à (Δ) . Soit $M(m, m')$ la trace horizontale de (G) . Montrer que, lorsque A varie sur (D) , le point m décrit une droite passant par la projection horizontale α de la trace horizontale de (D) .

2° En appelant (β, β') la trace horizontale de (Δ) , montrer que l'on a :

$$\beta m = ab = AB.$$

3° En déduire la construction d'une droite horizontale rencontrant (D) et (Δ) et sur laquelle ces droites découpent un segment de longueur donnée.

29. — On considère deux droites (D) et (Δ), non horizontales, dont les projections frontales se coupent en un point o' et dont les projections horizontales sont parallèles. Une horizontale les coupe respectivement en (a, a') et (b, b'). La ligne de rappel de o' coupe ab en ω , elle coupe (d) en α , (δ) en β et $a'b'$ en ω' .

1° Démontrer les relations :

$$\frac{\overline{\omega\alpha}}{\omega\beta} = \frac{\overline{\omega a}}{\omega b} = \frac{\overline{\omega'a'}}{\omega'b'}.$$

2° Montrer que le point ω est fixe lorsque l'horizontale varie et en déduire que les horizontales s'appuyant sur deux droites dont les projections horizontales sont parallèles rencontrent une verticale fixe.

TEXTES D'ÉPURES

30. — ABCD est un parallélogramme. Le côté AB, de longueur 50, est horizontal et fait 45° avec le plan de projection. Le côté AD a pour longueur 100. La projection horizontale du parallélogramme est un losange.

On donne

A : $x = 45$;	$y = -80$;	$z = 25$.
B : $x > 45$;	$-80 < y < 0$;	$z = 25$.
D : $x = 45$;	$y = -30$;	$z > 25$.

1° Dessiner les projections du parallélogramme.

2° Déterminer les ombres portées sur les plans de projection, opaques, les rayons lumineux étant parallèles et choisis de façon que le point A porte ombre sur le plan horizontal de projection au point de coordonnées :

$$x = 20; \quad y = -55; \quad z = 0.$$

31. — Un hexagone régulier ABCDEF a tous ses côtés horizontaux de cote 50. Le rayon du cercle circonscrit vaut 40. On donne les sommets :

A : $x = 0$;	$y = -40$;	$z = 50$;
B : $x = 0$;	$y = 0$;	$z = 50$;
C : $x > 0$;	$y = 20$;	$z = 50$.

1° Construire les projections de l'hexagone.

2° On découpe à l'intérieur de l'hexagone, plein et opaque, le triangle ACE de sorte qu'il reste les trois triangles : ABC, CDE, EFA. Représenter ces triangles et les ombres qu'ils portent sur les plans de projection, les rayons lumineux émanant du point S, de cote $z = 120$, dont la projection horizontale coïncide avec celle du point E.

CHAPITRE II

LE PLAN

- 1. Épure du plan.
- 2. Plans remarquables.
- 3. Lignes de pente.
- 4. Résumé.

1

ÉPURE
DU PLAN

■ 22. Détermination d'un plan. — 1° Deux droites concourantes ou parallèles (D) et (Δ) déterminent un plan. On peut construire une droite quelconque (L) de ce plan en joignant un point A de (D) à un point B de (Δ) (fig. 58).

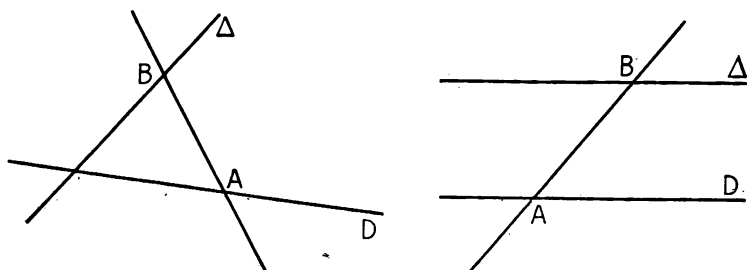


Fig. 58.

2° Trois points non alignés A, B et C définissent un plan dont

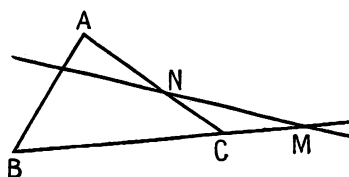


Fig. 59.

on connaît immédiatement trois droites BC, CA, AB et dont on peut, par conséquent, construire une droite quelconque (fig. 59) : par exemple on peut joindre un point M de BC à un point N de AC.

3° Une droite (D) et un point

A non situé sur cette droite définissent un plan dont on obtient facilement toutes les droites passant par A : il suffit de joindre A à un point M de (D).

Le plan est alors défini par les deux droites concourantes AM et (D).

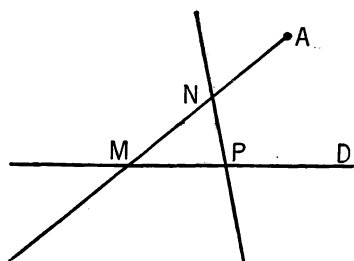


Fig. 60.

On peut construire une droite quelconque du plan en joignant un point N de AM à un point P de (D) (fig. 60).

Il est donc toujours possible de définir un plan par deux droites concourantes.

Si, pour une raison quelconque, le choix de ces deux droites se révèle gênant, nous retiendrons de ce qui précède qu'on peut remplacer une des droites ou les deux par deux autres droites quelconques du plan.

EXEMPLES. — I. Considérons un plan défini par la ligne de terre xy et une droite (d, d') parallèle. Prenons sur (d, d') un point (a, a') et sur la ligne de terre deux points (b, b') et (c, c') . Le même plan peut être défini par les droites AB et AC (fig. 61).

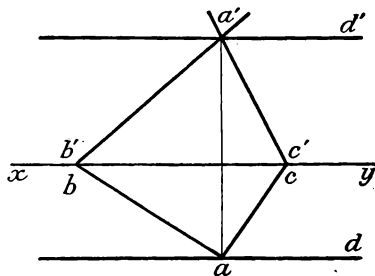
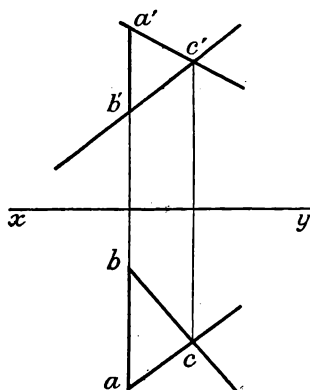
Fig. 61. — Plan défini par xy et une droite parallèle.

Fig. 62. — Plan défini par une droite de profil et un point.

II. Considérons un plan défini par la droite de profil $(ab, a'b')$ et par le point (c, c') . Le même plan peut être défini par les droites CA et CB dont aucune n'est de profil (fig. 62).

■ 23. **Problème fondamental.** *Un plan est défini sur une épure; déterminer un point de ce plan, connaissant une de ses projections.*

Soit un plan déterminé par les droites (d, d') et (δ, δ') qui se coupent en (o, o') . On se propose de trouver le point M du plan dont la projection horizontale est m .

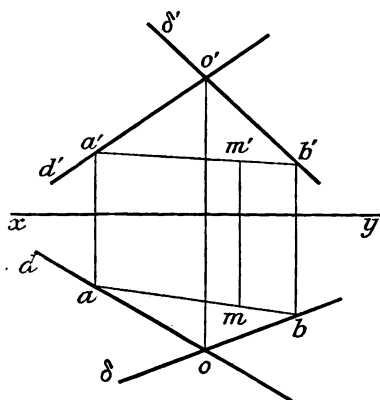


Fig. 63.

Les droites du plan qui passent par M ont des projections horizontales qui sont des droites passant par m . Traçons une de ces droites qui coupe (d) en a et (δ) en b . Le point (a, a') de (d, d') appartient au plan. Le point (b, b') de (δ, δ') appartient au plan. La droite $(ab, a'b')$ est dans le plan. Le point (m, m') de cette droite est donc dans le

plan et a pour projection horizontale le point m (fig. 63).

Si on avait donné la projection frontale m' , on aurait tracé une droite passant par m' et coupant d' et δ' respectivement en a' et b' . On en aurait déduit a et b par des lignes de rappel et on aurait obtenu la droite $(ab, a'b')$ du plan. Le point m aurait été sur cette droite et sur la ligne de rappel de m' .

● **REMARQUE.** — Le problème précédent peut s'énoncer sous les deux formes équivalentes :

1° *Trouver l'intersection d'un plan donné avec une droite verticale ou avec une droite de bout.*

2° *Déterminer une droite du plan connaissant l'une de ses projections.* En effet, nous avons construit la droite $(ab, a'b')$, soit à partir de ab , soit à partir de $a'b'$.

■ 24. **Traces d'un plan.** — On appelle **traces d'un plan** ses intersections avec les plans de projection.

On distingue la *trace horizontale* qui est l'intersection du plan avec le plan horizontal de projection et la *trace frontale* qui est l'intersection du plan avec le plan frontal de projection.

Si le plan n'est pas parallèle à la ligne de terre xy , il la coupe en un point (α, α') qui appartient aux deux traces.

→ Les traces d'un plan coupent la ligne de terre au même point.

Il arrive, parfois, qu'au lieu de définir un plan par deux droites quelconques on le définit par ses traces (fig. 64).

trace horizontale : αP , $\alpha' P'$ ($\alpha' P'$ est confondu avec xy)

trace frontale : αQ , $\alpha' Q'$ (αQ est confondu avec xy).

On désigne, souvent, ce plan par la notation : plan $P\alpha Q'$.

On aura une droite quelconque du plan en joignant un point (a, a') de la trace horizontale à un point (b, b') de la trace frontale. En prenant sur la droite $(ab, a'b')$ un point (m, m') on obtiendra un point quelconque du plan.

Si l'on connaît seulement la projection horizontale m d'un point du plan, la lecture de l'épure 64 indique la construction de la projection frontale m' : on trace amb d'où a' et b' puis m' sur $a'b'$ et sur la ligne de rappel de m .

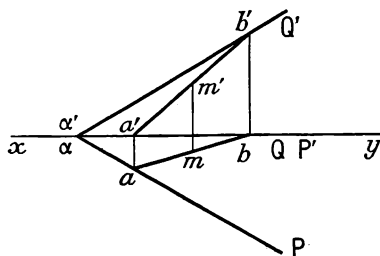


Fig. 64.

Notons que la trace horizontale d'un plan est le lieu des traces horizontales de toutes les droites du plan et que la trace frontale d'un plan est le lieu des traces frontales de toutes les droites du plan.

■ 25. Problème. — Trouver les traces d'un plan défini par deux droites qui se coupent.

Il suffit de chercher les traces horizontales et frontales des deux droites. Considérons le plan des deux droites (d, d') et (δ, δ') concourantes en (o, o') (fig. 65). La trace horizontale de la droite (d, d') est le point (a, a') . La trace horizontale de la droite (δ, δ') est le point (b, b') . La trace horizontale du plan est $(ab, a'b')$. Traçons ab qui coupe xy en α .

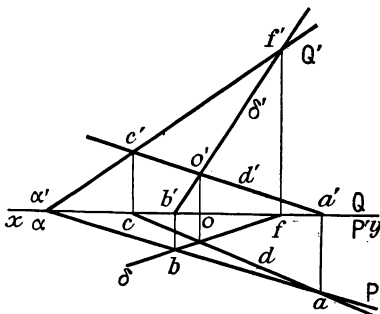


Fig. 65.

Le point (α, α') de xy est le point commun aux deux traces. En joignant α' à la projection frontale c' de la trace frontale de la droite (d, d') , on obtient la projection frontale (Q') de la trace frontale du plan.

La projection frontale f' de la trace frontale de la droite (δ, δ') est sur (O') .

La construction suppose que les traces horizontales de (D) et de (Δ) sont distinctes. Si ces traces sont confondues, on commencera par chercher la trace frontale du plan. Le cas, plus particulier, où (D) et (Δ) se couperaient sur la ligne de terre, est étudié en exercice (Ex. n° 36).

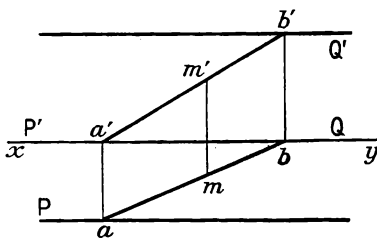


Fig. 66.

trace frontale est (Q, Q'). On aura une droite de ce plan (fig. 66) en joignant un point (a, a') de la trace horizontale à un point (b, b') de la trace frontale. On en déduit facilement un point (m, m') du plan.

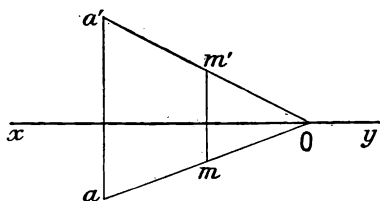


Fig. 67.

■ 27. Plan passant par la ligne de terre. — Ses traces sont confondues avec xy. Elles ne peuvent donc servir à définir le plan. On peut achever la détermination du plan

en donnant, par exemple, un point (a, a') du plan. Cherchons à déterminer un point M du plan connaissant, par exemple, sa projection frontale m'.

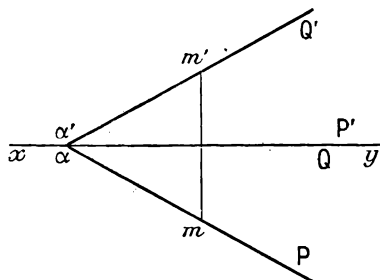


Fig. 68. — Le point (m, m') n'est pas dans le plan $P \propto Q'$.

La droite AM a pour projection frontale la droite a'm' qui coupe xy en O, sa projection horizontale est donc aO. On en déduit le point m (fig. 67).

● REMARQUE. — Dans le cas général, l'emploi des traces est rare. Ces traces peuvent d'ailleurs être situées en dehors des limites du dessin.

En outre, leur usage ne simplifie pas toujours les constructions. De toute façon, il faut se souvenir, lorsqu'un plan est désigné par la notation $P \propto Q'$, que les droites (P) et (Q'), dessinées sur

l'épure, ne sont pas les projections d'une droite du plan.

Il est conseillé aux débutants d'indiquer les deux projections : P et P'; Q et Q'; cela leur épargnera de graves fautes comme celle qui consiste à croire qu'un point du plan a des projections situées respectivement sur P et sur Q' (fig. 68).

■ 28. **Droites principales d'un plan.** — On appelle **horizontales** d'un plan les droites du plan qui sont parallèles au plan horizontal de projection.

● On appelle **frontales** d'un plan les droites du plan qui sont parallèles au plan frontal de projection.

● Les horizontales et les frontales d'un plan sont appelées **droites principales** du plan.

Les horizontales d'un plan sont parallèles entre elles. La trace horizontale du plan est l'horizontale particulière de cote nulle.

Les frontales d'un plan sont parallèles entre elles. La trace frontale du plan est la frontale particulière d'éloignement nul.

Si le plan est parallèle à la ligne de terre, les frontales sont également des horizontales.

Sur l'épure 69 où le plan est défini par deux droites concourantes (d, d') et (δ, δ'), on a obtenu une horizontale en joignant les points A et B de même cote. On a dessiné une autre horizontale : celle qui coupe (d, d') au point (c, c').

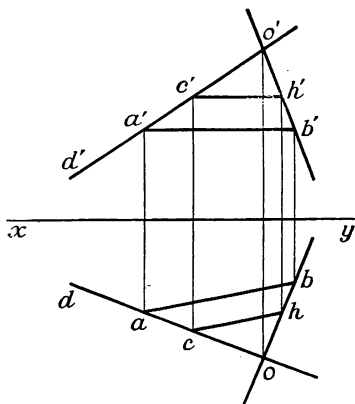


Fig. 69.

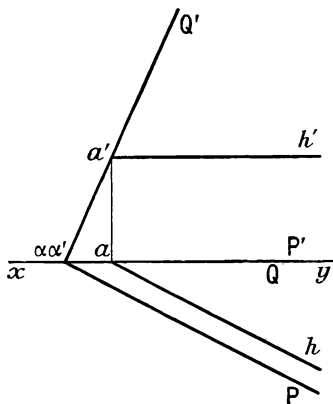


Fig. 70.

Sur l'épure 70 où le plan est défini par ses traces, on a tracé l'horizontale du point A. Sa projection frontale est parallèle à xy , sa projection horizontale est parallèle à la projection horizontale de la trace horizontale.

Des constructions analogues ont été faites sur les épreuves 71 et 72 en ce qui concerne les frontales.

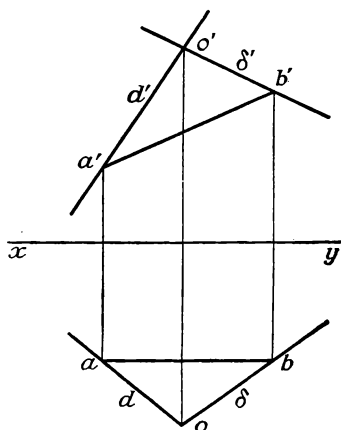


Fig. 71.

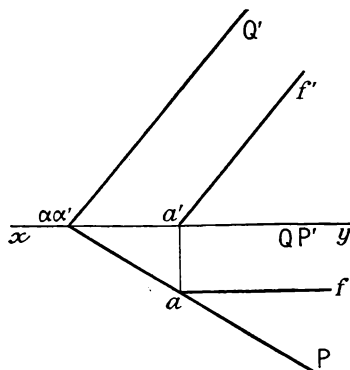


Fig. 72.

Réciproquement, un plan peut être défini par une frontale et par une horizontale. Ces droites étant dans un même plan et n'étant pas parallèles, ont un point commun.

Soit donc (fig. 73) une horizontale (h, h') et une frontale (f, f') se coupant en un point (o, o').

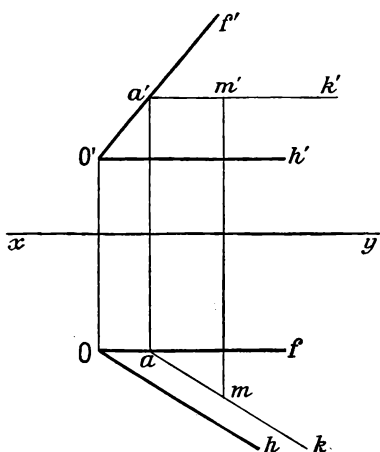


Fig. 73.

Reprenons, par exemple, le problème fondamental (n° 23) : trouver la projection frontale m' d'un point M du plan connaissant sa projection horizontale m .

L'horizontale du plan qui passe par M a sa projection horizontale mk parallèle à oh .

La droite mk coupe of en a que l'on rappelle en a' sur $o'f'$. On en déduit la projection frontale $a'k'$ de l'horizontale de M. En rappelant m en m' sur $a'k'$, on obtient le point (m, m').

Ce mode de représentation d'un plan est, en définitive, le plus intéressant.

Il n'est pas applicable si le plan est parallèle à la ligne de terre.

EXERCICES

32. — Un plan est défini par la ligne de terre et un point (a, a') .

1° Déterminer un point M du plan, connaissant sa projection horizontale m .

2° Tracer l'horizontale du plan passant par ce point.

33. — Par un point (a, a') on mène une horizontale (h, h') et une frontale (f, f') . Construire les traces du plan déterminé par ces deux droites.

34. — Un plan est déterminé par une droite (d, d') parallèle à la ligne de terre et par un point (a, a') . Construire ses traces.

35. — On considère un point A sur la ligne de terre et une droite de profil BC. On définit ainsi un plan ABC.

1° Construire l'horizontale passant par C.

2° Trouver les traces du plan.

36. — Par un point A (a, a') de la ligne de terre, on mène deux droites AD et AE.

1° Tracer une horizontale et une frontale du plan DAE.

2° Construire la projection frontale d'une droite AG du plan, connaissant sa projection horizontale ag .

3° Construire les traces du plan.

37. — Un plan est défini par une frontale (f, f') et un point (a, a') du second plan bissecteur.

1° Tracer l'horizontale du point A.

2° Construire les traces du plan.

38. — On donne trois points A (a, a') , B (b, b') , C (c, c') non alignés et la projection horizontale d d'un quatrième point D tel que le quadrilatère ABCD soit plan.

1° Construire d' .

2° Réciproquement, reconnaître si quatre points, donnés par leurs projections, sont situés dans un même plan.

39. — Un plan étant donné par ses traces, trouver un point de ce plan de cote et d'éloignement donnés.

Même question si le plan est donné par deux droites concourantes.

40. — Le point A a une cote nulle, le point B a un éloignement nul, le point C est dans le premier plan bissecteur.

1° Construire la frontale et l'horizontale du plan ABC qui passent par C.

2° Déterminer les traces du plan.

3° Mêmes questions si C est dans le deuxième bissecteur.

41. — Une droite du second bissecteur (d, d') et une droite du premier bissecteur (δ, δ') se coupent sur xy . Elles définissent un plan.

1° Construire une horizontale du plan, de cote donnée.

2° Construire une frontale du plan d'éloignement donné.

3° Déterminer les traces du plan.

42. — Construire les traces d'un plan défini par deux droites dont les projections de noms contraires coïncident.

43. — Construire les traces du plan ABC tel que AB soit parallèle à la ligne de terre et AC de profil.

2

PLANS REMARQUABLES

■ 29. **Rappel de propriétés géométriques.** — On a établi, en géométrie¹, les propriétés suivantes :

- 1° Quand deux plans sont perpendiculaires, les droites de l'un qui sont perpendiculaires à l'intersection des deux plans sont perpendiculaires à l'autre.
- 2° Tout plan (P) qui contient une perpendiculaire à un autre plan (Q) est perpendiculaire à (Q).
- 3° Quand deux plans sont perpendiculaires, toute droite menée d'un point de l'un, perpendiculairement à l'autre, est contenue dans le premier plan.
- 4° L'intersection de deux plans perpendiculaires à un troisième est perpendiculaire à ce troisième.

■ 30. **Plan vertical.** — On appelle **plan vertical** tout plan perpendiculaire au plan horizontal de projection.

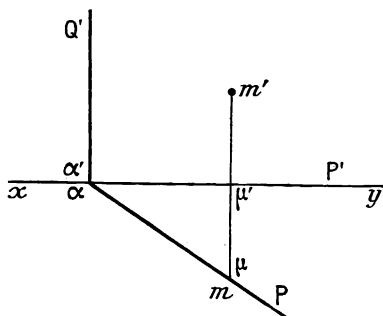


Fig. 74.

Tous les points d'un tel plan se projettent horizontalement sur sa trace horizontale (P) (n° 29, 3°).

Soit (P, P') une droite du plan horizontal de projection (fig. 74). Elle définit un plan vertical et un seul.

Réciproquement, considérons un point (m, m') dont la projection horizontale est sur (P). Ce point est dans le plan vertical car ce plan, contenant le point de cote nulle (μ, μ'), contient la verticale de ce point (n° 29, 3°), laquelle contient le point (m, m' .)

- Pour qu'un point appartienne à un plan vertical déterminé, il faut et il suffit que sa projection horizontale soit située sur une certaine droite dessinée sur l'épure et qui est la trace horizontale du plan.

Les frontales du plan sont des droites verticales (n° 29, 4°).

1. MAILLARD-MILLET, *Géométrie*, cl. de Première C et M, chap. v.

La trace frontale du plan passe par le point (α, α') et a pour projection frontale (Q') perpendiculaire à xy .

Réciproquement, si la trace frontale d'un plan est perpendiculaire à la ligne de terre, cette trace est verticale (n° 29, 1°) et le plan qui contient cette droite est vertical (n° 29, 2°).

En pratique, il est inutile de marquer la trace frontale d'un plan vertical. La donnée de la trace horizontale (P) suffit à déterminer le plan. Il arrive que l'on dise, pour abréger, « le plan vertical (P) »; on entend, par là, le plan vertical dont la trace horizontale a pour projection horizontale (P).

Toute figure située dans un plan vertical se projette horizontalement sur la trace (P). L'épure 75 montre un plan vertical qui contient le triangle ABC. On a marqué l'horizontale $(ah, a'h')$ du point A : elle coupe le côté BC en (d, d') . La frontale du point A est la verticale $(af, a'f')$.

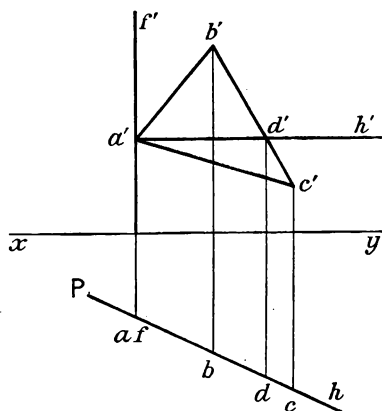


Fig. 75.

L'épure 75 montre un plan vertical qui contient le triangle ABC. On a marqué l'horizontale $(ah, a'h')$ du point A : elle coupe le côté BC en (d, d') . La frontale du point A est la verticale $(af, a'f')$.

La projection frontale $a'b'c'$ ne donne pas le triangle ABC en vraie grandeur.

Le plan horizontal de projection est perpendiculaire à la trace frontale (Q') d'un plan vertical. Il coupe donc le dièdre formé par ce plan vertical et le plan frontal de projection suivant le rectiligne.

→ La trace horizontale d'un plan vertical fait avec la ligne de terre un angle aigu égal à l'angle du plan et du plan frontal de projection.

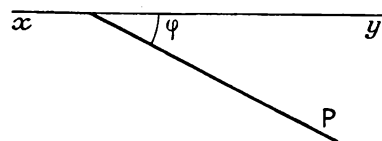


Fig. 76.

L'épure 76 indique cet angle φ . L'angle φ serait droit si le plan P était de profil.

■ 31. Plan de bout. — On appelle **plan de bout** tout plan perpendiculaire au plan frontal de projection.

Tous les points d'un tel plan se projettent frontalement sur sa trace frontale (n° 29, 3°). La connaissance de cette trace frontale définit le plan de bout correspondant.

Soit (Q, Q') une droite du plan frontal de projection (fig. 77).

Elle définit un plan de bout et un seul.

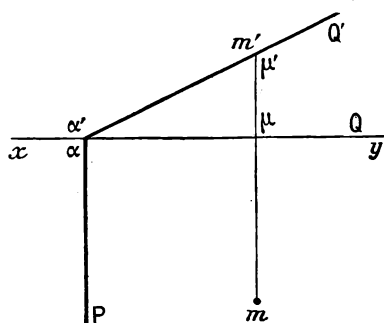


Fig. 77.

Réciproquement, considérons un point (m, m') dont la projection frontale est sur (Q') . Ce point est dans le plan de bout car ce plan, contenant le point d'éloignement nul (μ, μ') , contient la droite de bout de ce point (n° 29, 3°), laquelle contient le point (m, m') .

→ Pour qu'un point appartienne à un plan de bout déterminé, il faut et il suffit que sa projection frontale soit située sur une certaine droite dessinée sur l'épure et qui est la trace frontale du plan.

Les horizontales du plan sont des droites de bout (n° 29, 4°). La trace horizontale du plan passe par le point (α, α') et a pour projection horizontale (P) perpendiculaire à xy .

Réciproquement, si la trace horizontale d'un plan est perpendiculaire à la ligne de terre, cette trace est de bout (n° 29, 1°), et le plan qui contient cette droite est de bout (n° 29, 2°).

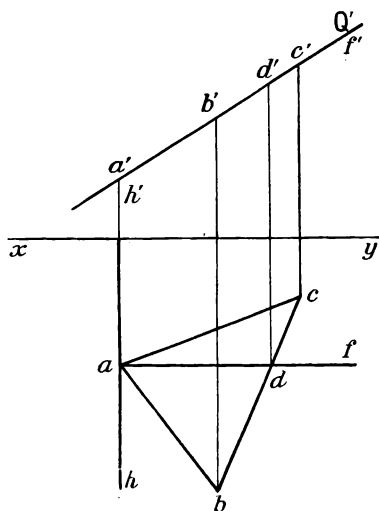


Fig. 78.

En pratique, il est inutile de marquer la trace horizontale d'un plan de bout. La donnée de la trace frontale (Q') suffit à déterminer le plan. Il arrive que l'on dise, pour abréger, « le plan de bout (Q') »; on entend, par là, le plan de bout dont la trace frontale a pour projection frontale (Q') .

Toute figure située dans un plan de bout se projette frontalement sur la trace (Q') . L'épure 78 montre un plan de bout qui contient le triangle ABC. On a marqué la frontale $(af, a'f')$ du point A : elle

coupe le côté BC en (d, d'). L'horizontale du point A est la droite de bout ($ah, a'h'$).

La projection horizontale abc ne donne pas le triangle ABC en vraie grandeur.

Le plan frontal de projection est perpendiculaire à la trace horizontale (P) d'un plan de bout. Il coupe donc le dièdre formé par ce plan de bout et le plan horizontal de projection suivant le rectiligne.

→ La trace frontale d'un plan de bout fait avec la ligne de terre un angle aigu égal à l'angle du plan et du plan horizontal de projection.

L'épure 79 indique cet angle θ .

L'angle θ serait droit si le plan (Q') était de profil : *un plan de profil est à la fois de bout et vertical*. Dans ce cas, un point de plan n'est plus déterminé par la connaissance de l'une de ses projections seulement.

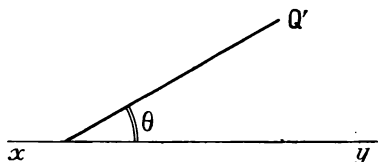


Fig. 79.

● **REMARQUE.** — Les plans verticaux et de bout jouent des rôles très importants en Géométrie descriptive. Les constructions qui les concernent sont simples et nous verrons, plus tard, que pour simplifier certaines méthodes générales nous serons conduits à ramener, par des transformations, un plan à être de bout ou vertical.

Nous allons étudier des plans de bout ou verticaux particuliers.

■ **32. Plan horizontal.** — On appelle **plan horizontal** tout plan parallèle au plan horizontal de projection.

Un tel plan est un plan de bout particulier.

Toutes les droites de ce plan sont horizontales. Sa trace frontale est donc une horizontale et, par suite, est parallèle à la ligne de terre.

La figure 80 montre la droite (H, H'), trace frontale d'un plan horizontal. Cette

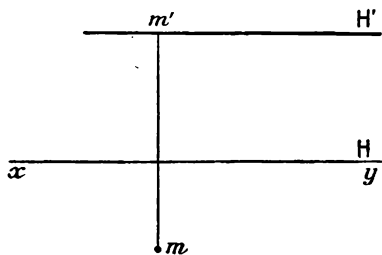


Fig. 80.

trace détermine le plan. Nous dirons souvent : le plan horizontal H' .

Il n'y a pas de trace horizontale.

Une figure quelconque d'un plan horizontal se projette horizontalement en vraie grandeur.

Les épreuves 81, 82, 83 et 84 représentent des figures dans un plan horizontal.

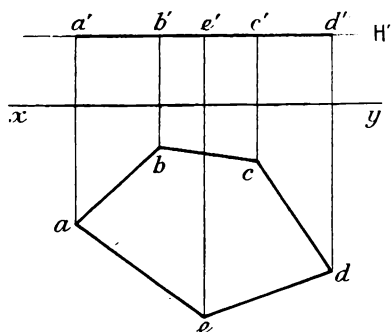


Fig. 81. — Pentagone.

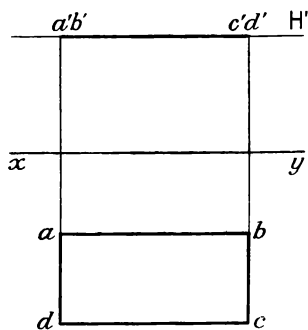


Fig. 82. — Rectangle.

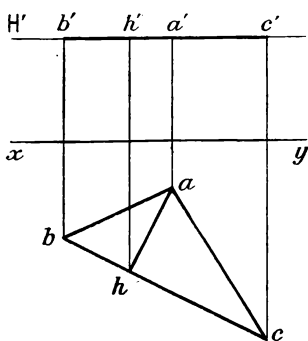


Fig. 83. — Triangle.

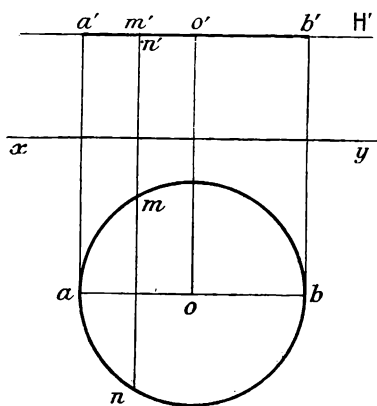


Fig. 84. — Cercle.

Figures horizontales.

L'épreuve 81 représente un pentagone convexe.

L'épreuve 82 représente un rectangle, ayant deux côtés opposés AD et BC de bout.

L'épreuve 83 représente un triangle ABC rectangle en A. La hauteur AH est projetée en vraie grandeur en ah.

L'épreuve 84 représente un cercle de centre (o, o'). Un point quelconque du segment a'b' est projection frontale de deux points du cercle.

■ 33. **Plan frontal.** — On appelle **plan frontal** tout plan parallèle au plan frontal de projection.

Un tel plan est un plan vertical particulier.

Toutes les droites de ce plan sont frontales. La trace horizontale est donc une frontale et, par suite, est parallèle à la ligne de terre.

La figure 85 montre la droite (F, F') , trace horizontale d'un plan frontal. Cette trace détermine le plan. Nous dirons souvent : le plan frontal F .

Il n'y a pas de trace frontale.

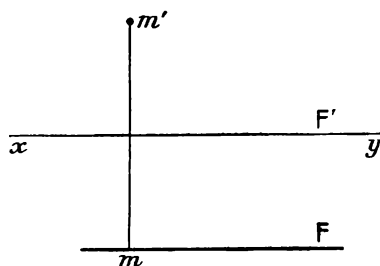


Fig. 85.

Une figure quelconque d'un plan frontal se projette frontalement en vraie grandeur.

Les épreuves 86 et 87 représentent des figures dans un plan frontal.

L'épreuve 86 représente un triangle ABC dont le côté AC est

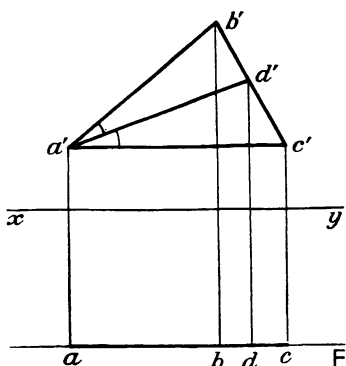


Fig. 86. — Triangle.

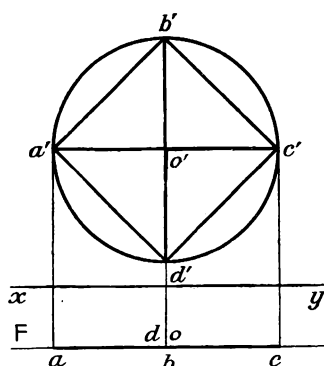


Fig. 87. — Carré.

Figures frontales.

parallèle à la ligne de terre. La bissectrice AD est projetée en vraie grandeur en $a'd'$.

L'épreuve 87 représente un carré ABCD dont la diagonale BD est verticale. On a marqué le cercle circonscrit.

Un plan ne peut pas être à la fois horizontal et frontal.

3

LIGNES
DE PENTE

■ 34. **Ligne de pente d'un plan.** — On a établi, en géométrie¹, les résultats suivants :

→ 1^o Relativement à un plan (Q), les droites d'un plan (P) dont la pente est la plus grande sont celles qui sont perpendiculaires à l'intersection des deux plans.

Ces droites s'appellent *lignes de pente* du plan (P) relativement au plan (Q). Elles sont parallèles entre elles.

→ 2^o L'angle d'une ligne de pente (P) avec le plan (Q) est l'angle aigu des deux plans (P) et (Q).

■ 35. **Construction d'une ligne de pente d'un plan relativement au plan horizontal.** — Si le plan (P) est *vertical*, les

lignes de pente sont les verticales du plan.

Si le plan (P) est *de bout*, les lignes de pente sont les parallèles à la trace frontale du plan (sauf si le plan est horizontal, auquel cas, les lignes de pente sont indéterminées).

L'épure 88 montre une ligne de pente (l , l') d'un plan de bout (Q').

Dans le cas général, une

ligne de pente est perpendiculaire aux horizontales du plan. Nous rappelons d'abord les résultats suivants, établis en géométrie (cl. de Première C et M, p. 83).

→ 1^o Si un angle droit a un côté parallèle à un plan (l'autre côté n'étant pas perpendiculaire à ce plan), il se projette orthogonalement sur ce plan suivant un angle droit.

→ 2^o Si un angle, ayant un côté parallèle à un plan, se projette orthogonalement sur ce plan suivant un angle droit, cet angle est droit.

Les conclusions subsistent si un côté de l'angle droit est dans le plan de projection au lieu de lui être parallèle.

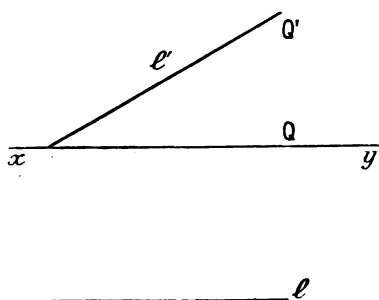


Fig. 88.

1. MAILLARD-MILLET, *Géométrie*, cl. de Première C et M, p. 91.

Considérons un plan quelconque défini, par exemple, par une horizontale (h, h') et une frontale (f, f') concourantes en A (a, a'). Prenons sur (f, f') un point B (b, b') et cherchons à construire la ligne de pente L (l, l') passant par B.

Si C (c, c') est le point où (L) rencontre (h, h'), l'angle $\widehat{ACB}$ est un angle droit. Or le côté AC est horizontal. La projection horizontale $\widehat{acb}$ de l'angle $\widehat{ACB}$ est donc un angle droit.

Réciproquement, si l'angle $\widehat{acb}$ est droit, l'angle $\widehat{ACB}$ est également droit.

La construction en résulte (fig. 89) : on mène la perpendiculaire bc sur h , on rappelle c en c' sur h' , d'où la projection frontale $c'b'$ de la ligne de pente (l, l').

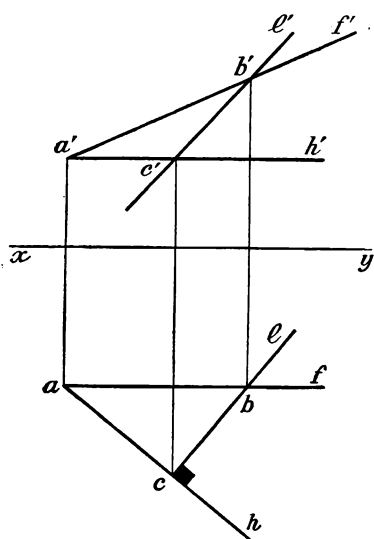


Fig. 89.

■ 36. **Problème inverse.** — Déterminer un plan, connaissant les projections (l, l') d'une ligne de pente relativement au plan horizontal.

Si (l, l') est verticale, le plan n'est pas déterminé. Tous les plans verticaux contenant (l, l') répondent à la question.

Si (l, l') est horizontale, le seul plan qui convient est le plan horizontal qui la contient.

Dans le cas général, soit (l, l') la ligne de pente. Prenons sur elle un point C (c, c'). Une horizontale d'un plan admettant (L) pour ligne de pente doit se projeter horizontalement suivant une perpendiculaire à (l). L'horizontale du point C est donc déterminée :

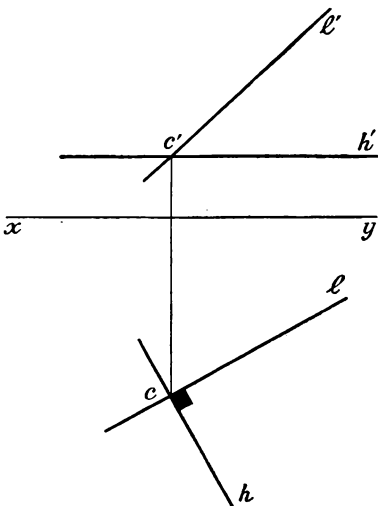


Fig. 90.

sa projection frontale $c'h'$ est parallèle à la ligne de terre; sa projection horizontale ch est perpendiculaire à (l) (fig. 90).

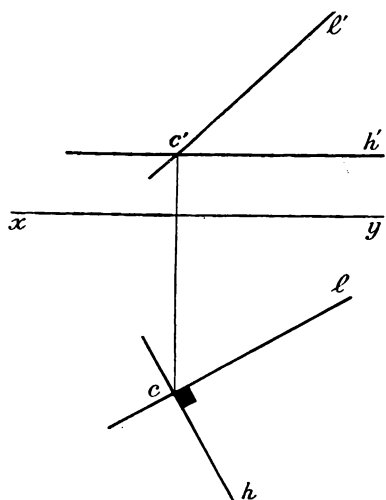


Fig. 90.

Si le plan (P) est *vertical*, les lignes de pente sont parallèles

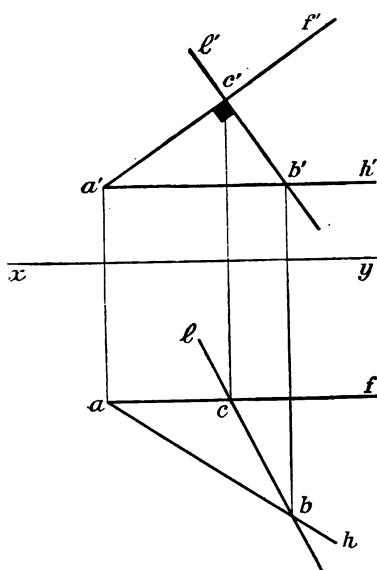


Fig. 91.

Le plan cherché est déterminé par l'horizontale ($ch, c'h'$) et par (l, l') .

Dans le cas particulier où (l, l') est frontale, les horizontales du plan sont des droites de bout. Le plan est donc de bout. Sa trace frontale est (l') .

■ 37. Ligne de pente relativement au plan frontal. —

On étudie, d'une manière analogue, les lignes de pente d'un plan (P) relativement au plan frontal de projection.

Si le plan (P) est *de bout*, les lignes de pente sont de bout.

Si le plan (P) est *vertical*, les lignes de pente sont parallèles à la trace horizontale du plan (sauf si le plan est de front, auquel cas, les lignes de pente sont indéterminées).

Dans le cas général, considérons un plan défini par une horizontale (h, h') et une frontale (f, f') concourantes en A (a, a'). Prenons sur (h, h') un point B (b, b'). La ligne de pente passant par B se construit en menant la perpendiculaire $b'c'$ sur f' et rappelant c' en c sur f . La projection frontale de L (l, l') est $b'c'$, sa projection horizontale est bc (fig. 91).

Inversement, donnons-nous la ligne de pente (l, l') .

Si (l, l') est *de bout*, tous les plans de bout contenant (l, l') répondent à la question.

Si (l, l') est frontale, le seul plan qui convient est le plan frontal qui la contient.

Dans le cas général, prenons sur (l, l') un point C (c, c') . La frontale du point C a pour projection frontale la perpendiculaire $c'f'$ à $c'l'$. Le plan cherché est défini par la frontale $(cf, c'f')$ et par (l, l') (fig. 92).

Dans le cas particulier où (l, l') est horizontale, les frontales du plan sont des verticales. Le plan est donc vertical. Sa trace horizontale est (l) .

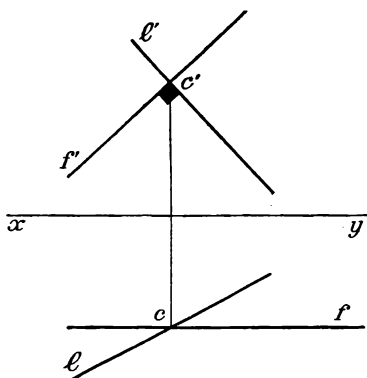


Fig. 92.

● REMARQUE. — Nous avons écarté, dans les problèmes ci-dessus concernant les lignes de pente, le cas où le plan est parallèle à la ligne de terre (ou bien contient la ligne de terre). Dans ce cas, les horizontales sont aussi frontales. Les lignes de pente relativement au plan horizontal sont aussi des lignes de pente relativement au plan frontal. Elles sont de profil. Elles se construisent facilement.

Considérons un plan (P) parallèle à la ligne de terre. Nous le définirons par deux droites D (d, d') et Δ (δ, δ') parallèles à la ligne de terre.

Une ligne de pente sera obtenue en joignant un point A (a, a') de (D) au point B (b, b') dans le même plan de profil que A.

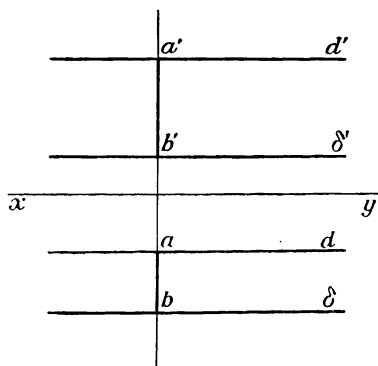


Fig. 93.

Inversement, la donnée de la droite de profil AB entraîne la connaissance des droites (D) et (Δ) (fig. 93).

En résumé, sauf si elle est verticale ou de bout, une ligne de pente suffit pour déterminer un plan.

38. Angles d'un plan (P) avec les plans de projection. —

Si (P) est vertical, il fait un angle droit avec le plan horizontal de projection et l'angle qu'il fait avec le plan frontal est l'angle de sa trace horizontale et de la ligne de terre (fig. 76).

Si (P) est de bout, il fait un angle droit avec le plan frontal de projection et l'angle qu'il fait avec le plan horizontal est l'angle de sa trace frontale et de la ligne de terre (fig. 79).

Dans le cas général, nous construirons une ligne de pente relative soit au plan horizontal, soit au plan frontal et nous serons ramenés à déterminer l'angle d'une droite et d'un plan de projection (n° 19).

1° Angle d'un plan avec le plan horizontal de projection.

Soit un plan défini par deux droites (D) et (Δ) concourantes en A (a, a').

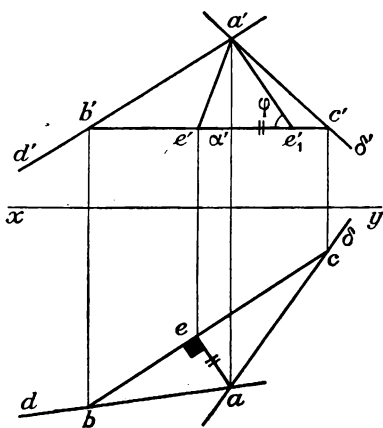


Fig. 94.

Nous avons construit une horizontale BC (fig. 94), puis une ligne de pente AE en menant ae perpendiculaire à bc .

Il s'agit de déterminer l'angle du segment AE avec le plan horizontal de projection.

La construction indiquée au n° 19, consiste à porter sur $b'c'$ à partir du point a' , intersection de $b'c'$ et de la ligne de rappel aa' , une longueur $a'e_1 = ae$.

L'angle cherché est l'angle

$$\varphi = \widehat{a'e_1a'}.$$

2° Angle d'un plan avec le plan frontal de projection. — Soit un plan $P\alpha Q'$ défini par ses traces (fig. 95). Prenons le point A (a, a') de la trace horizontale. La ligne de pente, relative au plan frontal, qui passe par A se construit en menant $a'b'$ perpendiculaire à (Q') et rappelant b' en b.

Il s'agit de déterminer l'angle du segment AB avec le plan frontal de projection.

La construction indiquée au n° 19 consiste à porter, sur la perpendiculaire en a à aa' , une longueur $ab_2 = a'b'$.

L'angle cherché est l'angle $\theta = \widehat{ab_2a'}$.

3° Angles d'un plan parallèle à la ligne de terre avec les plans de projection. — Soit un plan défini par deux droites (D) et (Δ) parallèles à la ligne de terre. Une ligne de pente est de profil :

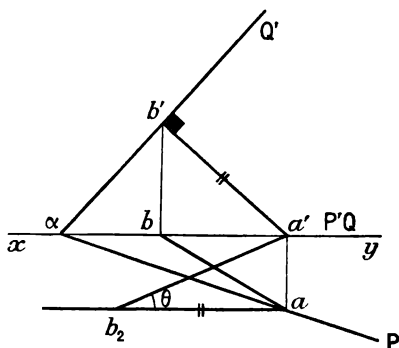


Fig. 95.

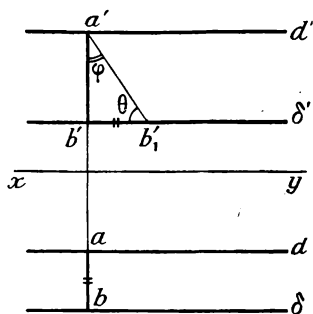


Fig. 96.

soit la droite ab , $a'b'$ (fig. 96). On est ramené à chercher les angles que fait cette droite avec les plans de projection : ce sont des angles complémentaires.

Il suffit de porter sur δ' un segment $b'b'_1 = ab$.

L'angle du plan et du plan horizontal de projection est :

$$\theta = \widehat{a'b'_1b'}.$$

L'angle du plan et du plan frontal de projection est :

$$\varphi = \widehat{b'a'b'_1}.$$

EXERCICES

44. — Construire les traces d'un plan défini par une ligne de pente relativement au plan frontal de projection.

45. — On donne un plan par ses traces.

1° Construire les projections d'une ligne de pente relativement au plan horizontal de projection.

2° Même question relativement au plan frontal de projection.

3° Déterminer les angles du plan avec les plans de projection.

46. — Utiliser l'exercice précédent pour déterminer la trace frontale d'un plan connaissant sa trace horizontale et l'angle θ qu'il fait avec le plan horizontal de projection.

47. — Un plan parallèle à la ligne de terre a ses traces horizontale et frontale respectivement à 4 et 5 cm de cette ligne. Déterminer les angles qu'il fait avec les plans de projection. Vérifier par le calcul.

4

RÉSUMÉ

Les définitions des termes usuels doivent être parfaitement sues. Les tableaux ci-dessous rassemblent les définitions et les propriétés essentielles des droites et plans remarquables. Nous appelons (H) le plan horizontal de projection et (F) le plan frontal de projection.

I. DROITES

Nom	Définition	Propriétés
verticale	perpendiculaire à (H)	Les projections horizontales de tous ses points sont confondues (fig. 97).
de bout	perpendiculaire à (F)	Les projections frontales de tous ses points sont confondues (fig. 98).
de profil	perpendiculaire à la ligne de terre	Les lignes de rappel de tous ses points sont confondues (fig. 99).
horizontale	parallèle à (H)	La projection frontale est parallèle à la ligne de terre (fig. 100).
frontale	parallèle à (F)	La projection horizontale est parallèle à la ligne de terre (fig. 101).

II. PLANS

Nom	Définition	Propriétés
vertical	perpendiculaire à (H)	Les projections horizontales de tous ses points sont alignées (fig. 102).
de bout	perpendiculaire à (F)	Les projections frontales de tous ses points sont alignées (fig. 103).
de profil	perpendiculaire à la ligne de terre	Les lignes de rappel de tous ses points sont confondues (fig. 104).
horizontal	parallèle à (H)	Plan de bout dont la trace frontale est parallèle à la ligne de terre (fig. 105).
frontal	parallèle à (F)	Plan vertical dont la trace horizontale est parallèle à la ligne de terre (fig. 106).

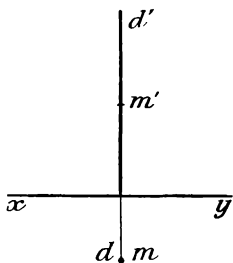


Fig. 97.
Droite verticale.

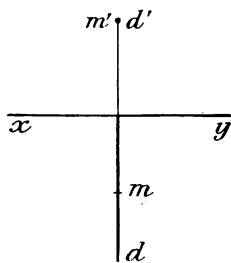


Fig. 98.
Droite de bout.

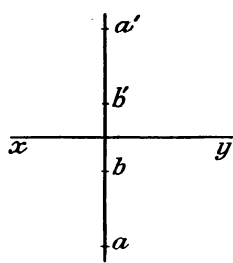


Fig. 99.
Droite de profil.

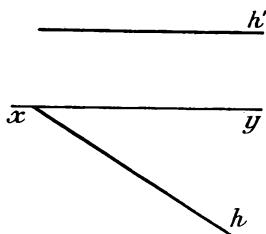


Fig. 100.
Droite horizontale.

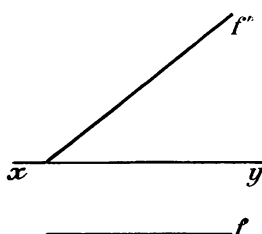


Fig. 101.
Droite frontale.

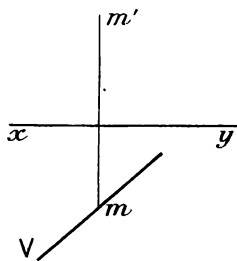


Fig. 102.
Plan vertical.

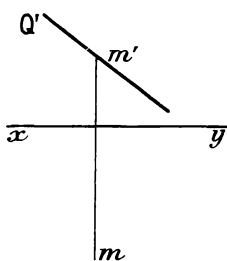


Fig. 103.
Plan de bout.

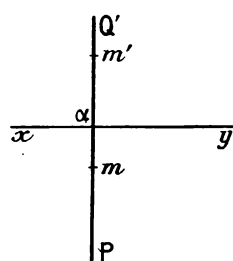


Fig. 104.
Plan de profil.

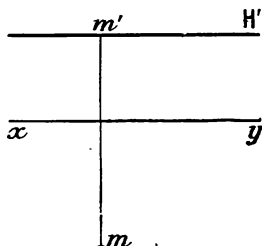


Fig. 105.
Plan horizontal.

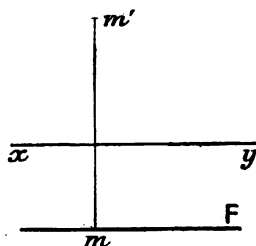


Fig. 106.
Plan frontal.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE II

48. — Dessiner l'épure d'un triangle équilatéral dans un plan frontal d'éloignement 4 cm. Le côté du triangle mesure 4 cm; une des hauteurs fait 80° avec la ligne de terre.

49. — Dessiner l'épure d'un hexagone régulier horizontal de cote 3 cm. Le côté a 4 cm. L'un des côtés est parallèle à la ligne de terre et l'éloignement du centre est 5 cm.

50. — Construire les projections d'un triangle isocèle vertical ABC dont la base BC horizontale fait 45° avec la ligne de terre. On connaît : $BC = 4$ cm et la hauteur $AH = 6$ cm. La cote de BC est 3 cm.

51. — Un plan de bout fait un angle de 30° avec le plan horizontal de projection. Un carré, placé dans ce plan, a un côté de bout qui mesure 7 cm.

1° Construire les projections du carré.

2° On mène par le centre O du carré la perpendiculaire à son plan. Déterminer les projections du point S de cette droite tel que la longueur OS soit égale à 6 cm.

52. — Construire la projection frontale d'un hexagone plan, connaissant sa projection horizontale et les projections frontales de trois de ses sommets.

53. — On donne un point A quelconque et une droite BC de profil qui coupe la ligne de terre en B. Construire les traces du plan ABC.

54. — Un plan est défini par une droite du second bissecteur et par un point quelconque. Trouver ses traces.

55. — Comment peut-on reconnaître qu'un plan défini par deux droites concourantes est parallèle à la ligne de terre ?

56. — On considère un triangle rectangle isocèle ABC dont l'hypoténuse BC vaut 6 cm. Son plan est de bout et fait 30° avec le plan horizontal de projection. Le point B a pour éloignement 3 cm et pour cote 1 cm. Construire les projections du triangle.

57. — On considère un plan défini par ses traces. La trace horizontale αP fait l'angle aigu β avec la ligne de terre. La trace frontale $\alpha Q'$ fait l'angle aigu γ avec la ligne de terre. On supposera que, sur le dessin, les demi-droites αP et $\alpha Q'$ sont situées d'un même côté par rapport à la ligne de rappel du point α .

1° On prend sur la trace horizontale du plan un point A (a, a'). Construire le point B (b, b') de la trace frontale tel que la droite AB soit une ligne de pente du plan relativement au plan horizontal de projection.

2° Déterminer l'angle θ du plan et du plan horizontal de projection. Montrer, à l'aide de la construction faite, que l'on a :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{bb'}{ab}.$$

3° En évaluant bb' et ab , respectivement, dans les triangles rectangles $\alpha bb'$ et αab , en déduire la formule :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\sin \beta}.$$

INTERSECTION DE DROITES ET DE PLANS

- 1. Droites et plans parallèles.
- 2. Intersection de droites et de plans.
- 3. Applications.
- 4. Ponctuation.
- 5. Droites et plans perpendiculaires.
- 6. Perpendiculaire commune à deux droites.

1

DROITES ET PLANS PARALLÈLES

■ 39. **Rappel de résultats.** — On a établi, en géométrie¹, les propriétés suivantes :

- 1° Pour qu'une droite soit parallèle à un plan, il faut et il suffit qu'elle soit parallèle à une droite du plan.
- 2° Pour que deux plans soient parallèles, il faut et il suffit que l'un d'eux contienne deux droites concourantes, parallèles à l'autre.
- 3° Les intersections de deux plans parallèles par un troisième sont des droites parallèles.

■ 40. **Problèmes** ● I. *Mener, par une droite donnée, le plan parallèle à une autre droite donnée.*

Soit à mener, par la droite AB, le plan parallèle à la droite (D). On mènera par A la parallèle AC à (D). Le plan ABC est le plan cherché (fig. 107). Le problème admet une solution si (D) et AB ne sont pas parallèles.

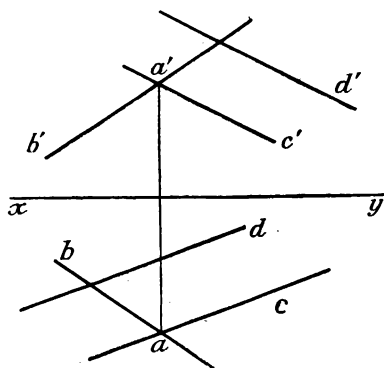


Fig. 107.

1. MAILLARD-MILLET. *Géométrie*, cl. de Première C et M, chap. III.

● II. *Mener, par un point donné, le plan parallèle à deux droites non parallèles données.*

Soit à mener, par le point A, le plan parallèle aux droites (D) et (Δ). Ce plan est déterminé par la parallèle AB à (Δ) et par la parallèle AC à (D).

■ 41. **Droites parallèles aux plans bissecteurs.** — On a vu (n° 6) que tout point du second bissecteur a ses projections confondues et que tout point du premier bissecteur a ses projections symétriques par rapport à la ligne de terre. Par suite : une droite (d, d') du second bissecteur a ses projections confondues, une droite (δ, δ') du premier bissecteur a ses projections symétriques par rapport à la ligne de terre (fig. 108).

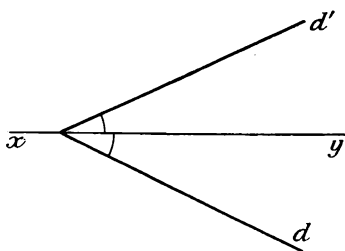
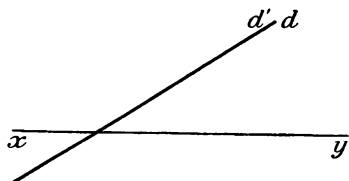


Fig. 108.

Droite du *second* bissecteur.Droite du *premier* bissecteur.

On en conclut qu'une droite sera :
parallèle au second bissecteur si ses projections sont parallèles ;
parallèle au premier bissecteur si ses projections ont des directions symétriques par rapport à la ligne de terre (fig. 109).

Nous avons supposé que les droites ne sont pas de profil.

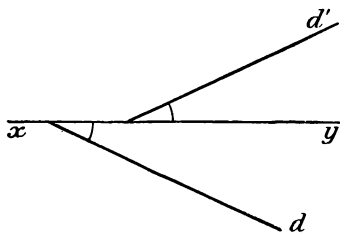
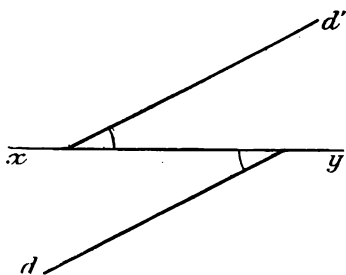


Fig. 109.

Droite parallèle
au *second* bissecteur.Droite parallèle
au *premier* bissecteur.

■ **42. Plans parallèles.** — Si deux plans sont parallèles, leurs horizontales sont parallèles, leurs frontales sont parallèles.

Réciproquement, si les horizontales d'un plan (P) sont parallèles aux horizontales d'un plan (Q) et si les frontales de (P) sont parallèles aux frontales de (Q), les plans (P) et (Q) sont parallèles, car chacun d'eux contient deux droites parallèles à l'autre. Le seul cas d'exception est le cas où la direction des horizontales est confondue avec la direction des frontales, c'est-à-dire le cas où les plans sont parallèles à la ligne de terre.

Théorème. — Une condition nécessaire et suffisante pour que deux plans, non parallèles à la ligne de terre, soient parallèles est que leurs horizontales soient parallèles ainsi que leurs frontales.

Cela revient à dire que les traces de même nom sont parallèles.

Si les plans sont parallèles à la ligne de terre, on reconnaîtra s'ils sont parallèles en traçant, dans ces plans, deux droites ayant leurs projections horizontales parallèles (ou confondues) et en cherchant si leurs projections frontales sont parallèles.

■ **43. Problème.** — *Mener, par un point donné, le plan parallèle à un plan donné.*

On tracera, dans le plan donné, deux droites concourantes (D) et (Δ). Par le point donné A, on mènera la parallèle AB à (D) et la parallèle AC à (Δ). Le plan ABC est le plan cherché.

La méthode est générale et s'applique à tous les cas. La simplicité des constructions dépend du choix des droites (D) et (Δ).

EXEMPLE. — *On donne un plan par ses traces. Trouver les traces du plan parallèle mené par un point donné.*

Soit le plan donné $P\alpha Q'$ et A, (a, a') le point donné. L'horizontale du plan cherché, qui passe par A, est parallèle à la trace horizontale αP du plan donné. C'est l'horizontale $ah, a'h'$ dont la trace frontale est le point (b, b') (fig. 110).

La trace frontale du plan cherché est la droite (Q_1') menée par b' parallèlement à (Q'). Cette trace coupe xy au point α_1 par lequel on mène la parallèle (P_1) à (P).

Le plan $P_1\alpha_1Q_1'$ est le plan cherché.

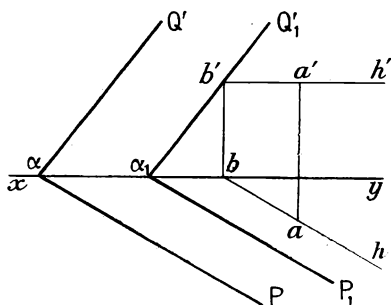


Fig. 110.

2

INTERSECTION
DE DROITES
ET DE PLANS

■ 44. **Intersection d'une droite et d'un plan perpendiculaire à l'un des plans de projection.** — Soit à trouver le point de rencontre du plan vertical (V) et de la droite (d, d') (fig. 111). Tout point de (V) se projette horizontalement sur la trace horizontale (P) du plan; tout point de la droite (D) se projette horizontalement sur (d). Donc la projection horizontale du point cherché est le point m commun à la projection horizontale (d) de la droite et à la trace horizontale (P) du plan (V). On en déduit la projection frontale m' par ligne de rappel.

Nous avons supposé que (D) n'est pas de profil.

On déterminerait, d'une façon analogue, l'intersection d'une droite et d'un plan de bout.

■ 45. **Intersection d'un plan et d'un plan perpendiculaire à l'un des plans de projection.** — Soit à trouver l'intersection du plan défini par deux droites ($oa, o'a'$) et ($ob, o'b'$) avec le plan de bout dont la trace frontale est (Q') (fig. 112). L'intersection de ces deux plans distincts est une droite (D) dont la projection frontale (d') est confondue avec (Q'). On est alors ramené à déterminer une droite d'un plan connaissant l'une de ses projections. La droite (D) coupe OA au point C dont nous connaissons la projection frontale c' : on en déduit c par ligne de rappel. De même, la droite (D) coupe OB en E (e, e'). La droite (D) joignant C et E a pour projections ce et $c'e'$.

Sur la figure 113, le plan $P \propto Q'$ est coupé par le plan vertical (V). L'intersection est la droite ($ab, a'b'$), joignant les points (a, a') et (b, b') où le plan (V) coupe les traces du plan donné.

● REMARQUES. I. Si deux plans sont verticaux (et non parallèles), leur intersection est une verticale (fig. 114).

Si deux plans sont de bout (et non parallèles), leur intersection est une droite de bout.

II. Si l'un des plans est de bout et si l'autre est vertical, la droite d'intersection des deux plans est toute trouvée. Sa projection horizontale coïncide avec la projection horizontale de la trace horizontale du plan vertical et sa projection frontale coïncide avec la projection frontale de la trace frontale du plan de bout (fig. 115).

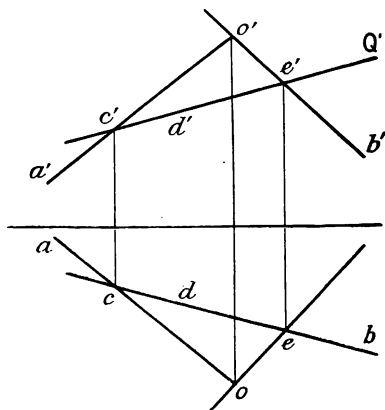


Fig. 112. — Intersection d'un plan et d'un plan de bout.

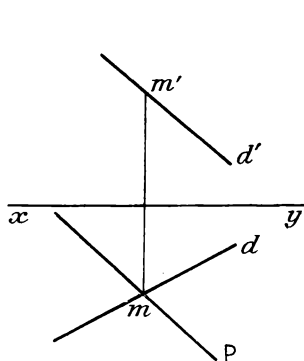


Fig. 111. — Intersection d'une droite et d'un plan vertical.

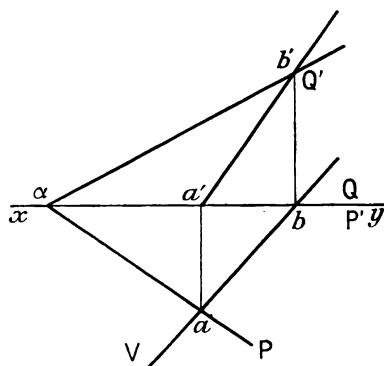


Fig. 113. — Intersection d'un plan et d'un plan vertical.

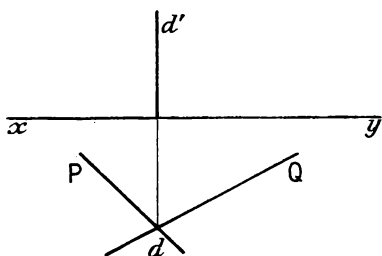


Fig. 114. — Intersection de deux plans verticaux.

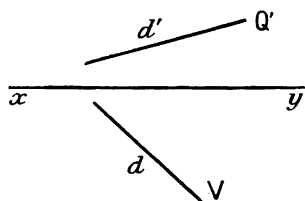


Fig. 115. — Intersection d'un plan vertical et d'un plan de bout.

- 46. Intersection de deux plans quelconques. — Deux plans distincts, non parallèles, se coupent suivant une droite dont les points sont communs aux deux plans. Pour la déterminer, il suffit d'en connaître deux points ou encore un point et sa direction. Pour obtenir un point, on utilise la méthode suivante.

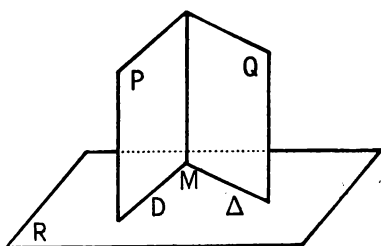


Fig. 116.

→ **Méthode générale.** — Pour trouver un point commun à deux plans (P) et (Q), on coupe ces plans par un plan auxiliaire (R). Ce plan (R) coupe (P) suivant une droite (D) et il coupe (Q) suivant une droite (Δ).

Si les droites (D) et (Δ), situées dans (R), sont sécantes en un point M, ce point M appartient aux plans (P) et (Q) (fig. 116). C'est le cas général.

Si les droites (D) et (Δ) sont parallèles, la droite commune à (P) et (Q) leur est parallèle (fig. 117).

Si les droites (D) et (Δ) sont confondues, elles coïncident avec la droite commune aux plans (P) et (Q) (fig. 118).

Il suffit (sauf dans le troisième cas) de recommencer l'opération pour que l'intersection des deux plans soit déterminée.

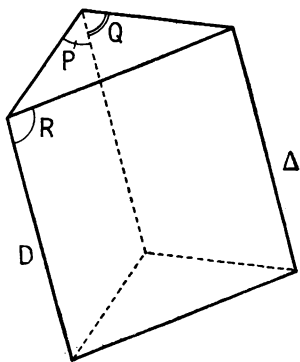


Fig. 117.

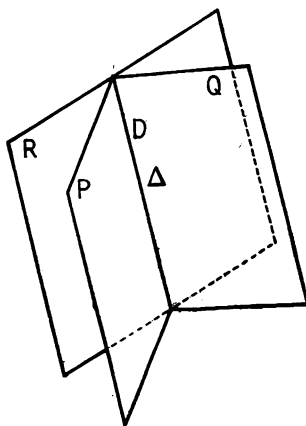


Fig. 118.

La méthode n'est applicable qu'à la condition de choisir pour plan auxiliaire (R) un plan pour lequel la détermination des

droites (D) et (Δ) est rapide. On utilise, en général, un plan vertical ou de bout et, plus particulièrement, un plan frontal ou horizontal. On est alors ramené au problème étudié au n° 45.

EXEMPLES. — I. *Intersection de deux plans définis chacun par deux droites concourantes.*

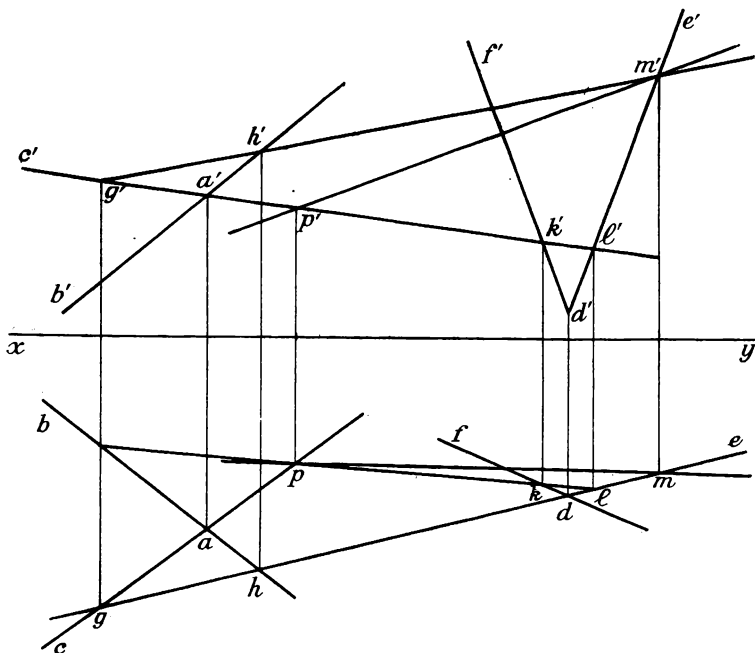


Fig. 119.

L'un des plans est le plan des droites AB et AC. L'autre est le plan des droites DE et DF (fig. 119).

Il est commode d'utiliser comme plans auxiliaires deux des huit plans projetant ces droites.

Il faut, cependant, éviter de prendre les deux plans projetant la même droite, car ils donneraient le même point.

Coupons par le plan vertical de . Il coupe le plan ABC suivant la droite ($gh, g'h'$) et il coupe le plan DEF suivant la droite ($de, d'e'$) toute construite. Ces deux droites se coupent au point (m, m') qui est un point de l'intersection.

Recommençons l'opération avec le plan de bout $a'c'$. Il coupe le plan ABC suivant la droite ($ac, a'c'$) toute construite et il coupe le plan DEF suivant la droite ($kl, k'l'$). Ces deux droites se coupent au point (p, p') qui appartient à l'intersection.

La droite cherchée est la droite ($mp, m'p'$).

II. Intersection de deux plans définis par leurs traces.

Nous supposons que les traces des plans $P\alpha Q'$ et $R\beta S'$ se coupent dans les limites du dessin (fig. 120). Prenons comme plan auxiliaire le plan horizontal de projection. On obtient le point (m, m') . Le plan frontal de projection conduira au point (p, p') . La droite cherchée est la droite $(mp, m'p')$.

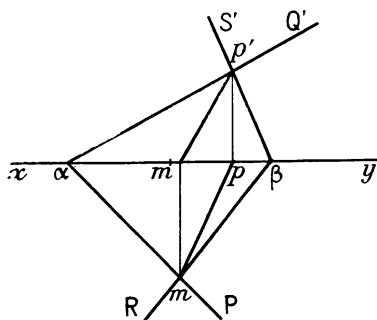


Fig. 120.

III. Intersection de deux plans, parallèles à la ligne de terre, définis par leurs traces.

Soit les plans de traces respectives (P) et (Q') d'une part (R) et (S') d'autre part (fig. 121).

L'intersection de ces plans est parallèle à la ligne de terre xy ; il suffit donc d'en connaître un point.

Utilisons comme plan auxiliaire un plan de bout (B'). Il coupe le premier plan suivant la droite $(cd, c'd')$; il coupe le second plan suivant la droite $(ef, e'f')$. Ces deux droites se rencontrent en (m, m') .

La droite (l, l') , menée par (m, m') parallèlement à xy , est l'intersection des deux plans.

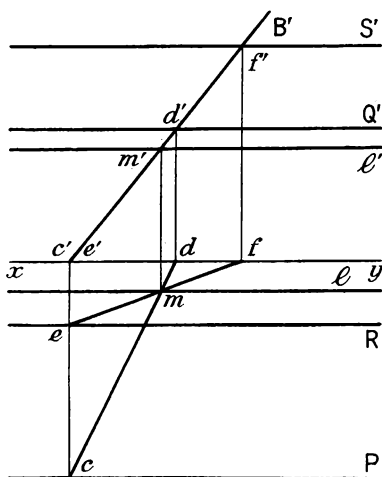


Fig. 121.

■ 47. Intersection d'une droite et d'un plan quelconques. --- Nous avons déjà traité les cas suivants :

1° La droite est perpendiculaire à un plan de projection (n° 23). On est ramené à trouver les projections d'un point d'un plan connaissant l'une des projections.

2° Le plan est perpendiculaire à un plan de projection (n° 44).

Dans le cas général, on remarque que le point de rencontre M d'une droite (D) et

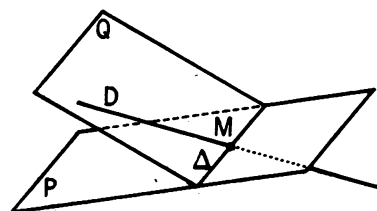


Fig. 122.

d'un plan (P) appartient à l'intersection (Δ) du plan (P) et d'un plan (Q) passant par (D) (fig. 122).

Si (D) et (Δ) sont parallèles, la droite (D) est parallèle à (P).
On en déduit la méthode suivante :

→ **Méthode générale.** — Pour trouver le point commun à une droite (D) et à un plan (P), on fait passer par (D) un plan auxiliaire (Q). Ce plan (Q) coupe (P) suivant une droite (Δ). Le point de rencontre M de (D) et de (Δ) est le point cherché.

Le plan auxiliaire (Q) sera choisi de façon que son intersection avec (P) soit aisée à construire.

On choisit, habituellement, l'un des plans projetant (D).

On est alors ramené à trouver l'intersection de (P) et d'un plan de bout ou vertical (n° 45).

EXEMPLES. — I. *Le plan est défini par deux droites concourantes OA et OB. La droite (D) est quelconque (fig. 123).*

Prenons comme plan auxiliaire le plan vertical projetant (D). Ce plan coupe le plan AOB suivant la droite ($ce, c'e'$).

Le point de rencontre de cette droite et de (D) est projeté frontalement en m' au point commun à $c'e'$ et à (d'). On en déduit m .

Le point (m, m') est le point cherché.

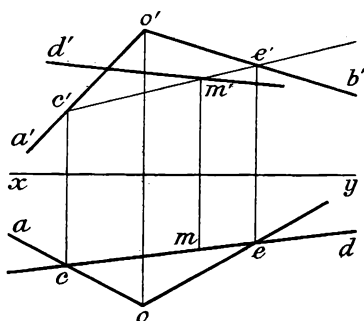


Fig. 123.

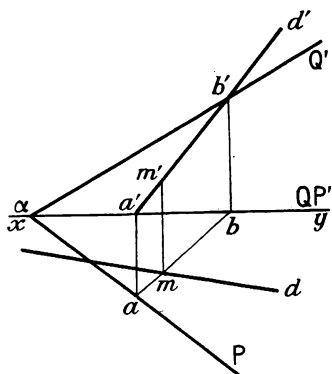


Fig. 124.

II. *Le plan est défini par ses traces. La droite est quelconque (fig. 124).*

Prenons comme plan auxiliaire le plan de bout (d'). Il coupe le plan donné suivant la droite ($ab, a'b'$) (n° 45).

En projection horizontale, la droite ab coupe d en m que l'on rappelle en m' .

Le point (m, m') est le point cherché.

III. *Le plan est défini par ses traces $P\alpha Q'$. La droite AB est de profil.*

Si l'on prend comme plan auxiliaire le plan de profil projetant AB, celui-ci coupe le plan donné suivant la droite de profil ($cd, c'd'$). Il reste à trouver l'intersection des deux droites de profil AB et CD.

EXERCICES

58. — Mener, par un point donné, le plan parallèle à un plan, de bout, donné.

59. — Mener, par une droite verticale, donnée, le plan parallèle à une droite donnée.

60. — Mener par une droite frontale, donnée, le plan parallèle à une droite de profil, donnée. Construire les traces du plan.

61. — On donne un plan (P) passant par la ligne de terre et un point A (a, a'). Mener, par un point donné B (b, b'), le plan parallèle à (P).

62. — On donne la projection horizontale (d) d'une droite et un point A (a, a') de cette droite. Trouver sa projection frontale (d'), sachant que la droite est parallèle à un plan (Q) donné.

Déterminer l'intersection de deux plans dans les cas suivants :

63. — Les deux plans sont définis par leurs traces, leurs traces frontales étant parallèles.

64. — L'un des plans est défini par ses traces, l'autre par la ligne de terre et un point.

65. — Les plans sont définis par leurs traces; les traces de même nom ne se coupent pas dans les limites de l'épure.

66. — L'un des plans est le second bissecteur, l'autre est défini par ses traces.

67. — Les deux plans sont définis, le premier par un point O et une horizontale, le second par le même point O et une frontale.

68. — Les deux plans sont définis par leurs traces et ils coupent la ligne de terre au même point.

69. — Les deux plans sont définis par leurs lignes de pente relativement au plan horizontal.

70. — Chaque plan est défini par une droite de profil et un point de la ligne de terre.

71. — L'un des plans $P\alpha Q'$ est défini par ses traces, l'autre est le plan de profil du point α .

Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan dans les cas suivants :

72. — Le plan est défini par xy et un point. La droite est quelconque.

73. — Le plan est défini par une ligne de pente. La droite est la ligne de terre.

74. — Le plan est défini par deux droites concourantes ($oa, o'a'$) et ($ob, o'b'$). La droite (d, d') est telle que (d) passe par o et (d') est parallèle à $o'a'$.

75. — Les traces du plan αP et $\alpha Q'$ sont confondues, la droite est horizontale.

3

APPLICATIONS

La détermination de l'intersection de deux plans et de l'intersection d'une droite et d'un plan permet de résoudre des problèmes fondamentaux auxquels on est ramené fréquemment.

■ 48. Problème I. — *Mener, par un point donné A, une droite rencontrant deux droites données (D) et (Δ).*

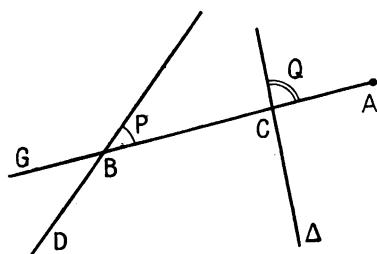


Fig. 127.

Nous supposons que les droites (D) et (Δ) ne sont pas dans un même plan et qu'aucune d'elles ne passe par A (fig. 127).

Si ces hypothèses ne sont pas vérifiées, on traitera aisément la question.

Si une droite, passant par A, rencontre (D) en B et (Δ) en C, cette droite appartient au plan (P) défini par A et (D) et aussi au plan (Q) défini par A et (Δ).

Réciproquement, considérons les plans (P) et (Q). Ils ne sont pas parallèles puisqu'ils contiennent le point A. Ils ne sont pas confondus puisque (D) et (Δ) ne sont pas dans un même plan. Ils se coupent donc suivant une droite (G). Cette droite passe par A et elle rencontre (D) et (Δ). Il peut arriver, toutefois, que (G) soit parallèle à l'une de ces droites.

D'où la méthode :

→ La droite cherchée est l'intersection des plans définis par A et (D) d'une part, par A et (Δ) d'autre part.

On est ramené à un problème connu (n° 46) avec la circonstance favorable que l'on connaît déjà un point de l'intersection : le point A. Il suffira d'en trouver un autre. On peut, par exemple, chercher à déterminer le point B. Ce point B est le point commun à la droite (D) et au plan (Q).

Cette façon d'opérer est dissymétrique, mais elle est d'une application souvent facile.

EXEMPLE. — Mener, par le point (a, a') , une droite rencontrant les droites (d, d') et (δ, δ') (fig. 128).

Le plan (Q) , défini par A et (Δ) , a été déterminé par (Δ) et la parallèle (Δ_1) menée par A . L'intersection B de (D) et de (Q) a été obtenue en utilisant le plan auxiliaire de bout (d') qui coupe (Q) suivant la droite $(ee_1, e'e'_1)$. La droite cherchée est la droite AB .

A titre de vérification graphique, la droite ab rencontre (δ) en c ; la droite $a'b'$ rencontre (δ') en c' . On doit constater que c et c' sont sur la même ligne de rappel.

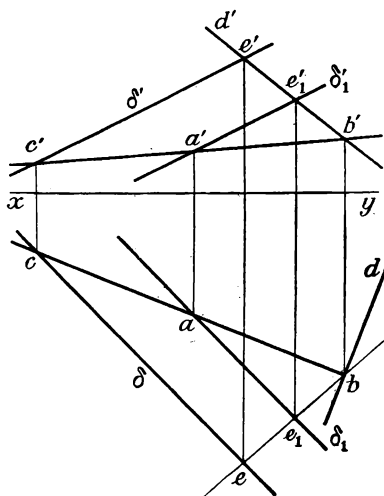


Fig. 128.

■ **49. Problème II.** — Mener une droite parallèle à une droite donnée (L) et rencontrant deux droites données (D) et (Δ) .

Nous supposons que (D) et (Δ) ne sont pas dans un même plan et qu'aucune d'elles n'est parallèle à (L) .

Si ces hypothèses ne sont pas vérifiées, on traitera aisément la question.

Si une droite (fig. 129), parallèle à (L) , rencontre (D) en B et (Δ) en C , elle appartient au plan (P) mené par (D) et parallèle à (L) ; elle appartient aussi au plan (Q) mené par (Δ) et parallèle à (L) .

Réciproquement, considérons les plans (P) et (Q) . Ils ne sont pas confondus puisque (D) et (Δ) ne sont pas dans un même plan. S'ils sont parallèles, le problème n'admet pas de solution. S'ils sont sécants, leur droite commune rencontre (D) et (Δ) et elle est parallèle à (L) . Le problème admet alors une solution.

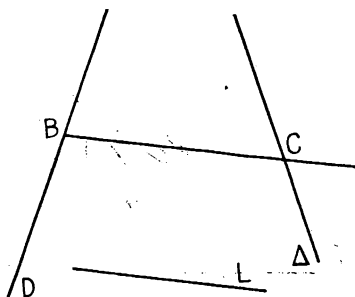


Fig. 129.

→ La droite cherchée est l'intersection des plans parallèles à (L) , menés respectivement par (D) et (Δ) .

Le problème n'est possible que si les droites (D) , (Δ) , (L) ne sont pas parallèles à un même plan.

On est ramené à un problème connu (n° 46) avec la circon-

EXEMPLE. — Mener par (a, a') une droite parallèle au plan $P\alpha Q'$ et rencontrant la droite (d, d') (fig. 132).

Le plan, parallèle au plan $P\alpha Q'$, mené par A a été déterminé par l'horizontale $(ah, a'h')$ et par la frontale $(af, a'f')$. Le point de rencontre B de ce plan avec la droite (d, d') a été obtenu en utilisant le plan auxiliaire vertical (d) qui coupe le plan HAF suivant la droite $(uv, u'v')$. La droite cherchée est la droite AB.

EXERCICES

Mener, par un point donné A, une droite rencontrant deux droites données (D) et (Δ) dans les cas suivants :

	A	D	Δ
76.	quelconque	horizontale	frontale
77.	sur xy	de profil	quelconque
78.	quelconque	verticale	du second bissecteur
79.	quelconque	quelconque	en xy
80.	quelconque	de profil	en xy

Mener une droite parallèle à une droite donnée (L) et rencontrant deux droites données (D) et (Δ) dans les cas suivants :

	L	D	Δ
81.	frontale	horizontale	quelconque
82.	xy	quelconque	quelconque
83.	quelconque	quelconque	de bout
84.	xy	de profil	de profil
85.	de profil	horizontale	du second bissecteur

Mener une droite, passant par un point donné A, parallèle à un plan donné (P) et rencontrant une droite donnée (D), dans les cas suivants :

	A	P	D
86.	quelconque	horizontal	quelconque
87.	quelconque	vertical	de profil
88.	quelconque	quelconque	xy

4

PONCTUATION

■ **51. Ponctuation d'une épure.** — Pour faciliter la lecture d'une épure, on emploie des traits différents pour représenter des lignes vues ou des lignes cachées. Ponctuer une épure, c'est décider, des diverses lignes à tracer, lesquelles sont vues et lesquelles sont cachées.

Pour pouvoir parler de lignes vues et de lignes cachées il faut définir l'observateur. Les conventions sont les suivantes :

1^o *La ponctuation de la projection horizontale indique les parties vues par un observateur placé au-dessus du plan horizontal de projection, aussi loin de ce plan que l'on voudra du côté des cotes positives, et qui regarde le plan horizontal.*

Il en résulte que :

→ De plusieurs points situés sur une même verticale, seul celui qui a la plus grande cote est vu. Les autres sont cachés.

Il arrive que l'on complique légèrement le problème en supposant que le plan horizontal de projection est opaque (n^o 14).

On notera que, pour l'observateur, le plan frontal de projection est vu par la tranche et qu'il n'intervient pas dans la ponctuation de la projection horizontale.

2^o *La ponctuation de la projection frontale indique les parties vues par un observateur placé en avant du plan frontal de projection, aussi loin qu'on le voudra du côté des éloignements positifs, et qui regarde le plan frontal.*

Il en résulte que :

→ De plusieurs points situés sur une même droite de bout, seul celui qui a le plus grand éloignement est vu. Les autres sont cachés.

Il arrive que l'on complique légèrement le problème en supposant que le plan frontal de projection est opaque.

On notera aussi que, pour l'observateur, le plan horizontal est vu par la tranche et qu'il n'intervient pas dans la ponctuation de la projection frontale.

La recherche de la ponctuation d'une figure formée de droites et de plans revient donc à l'étude de l'intersection de plans et de droites verticales ou de bout.

■ 52. Ponctuation d'une droite et d'un plan illimités. —

Soit un plan défini par deux droites concourantes OA et OB. Considérons une droite AC perçant le plan en A. Nous nous proposons de ponctuer le plan et la droite opaques et illimités, les plans de projection étant transparents (fig. 133).

1° Projection horizontale. —

Le changement de ponctuation de la droite se fait en a quand la droite traverse le plan. Il s'agit de savoir quelle est la demi-droite qui est vue et quelle est la demi-droite qui est cachée. Faisons un essai en prenant le point d commun à ac et à ob . La verticale de ce point d coupe le plan en (d, d') sur OB et rencontre AC en un point (d, d'_1) de cote supérieure à la cote de d' . Par suite la demi-droite limitée à a et qui contient d en projection horizontale est vue, l'autre est cachée.

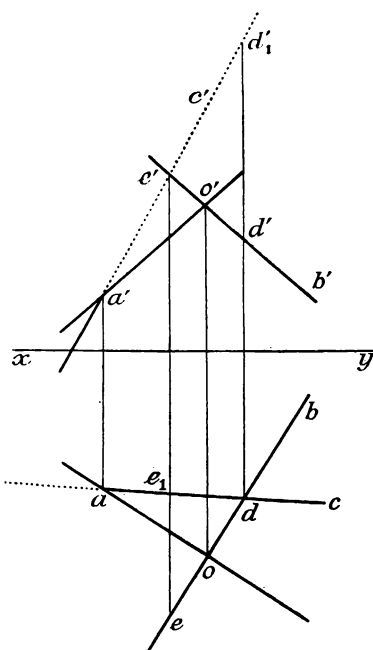


Fig. 133.

2° Projection frontale. —

En utilisant la droite de bout passant par le point e' de rencontre de $a'c'$ et $o'b'$, on constate que le point (e_1, e') de la droite AC a un éloignement inférieur à l'éloignement du point (e, e') du plan. La demi-droite $a'e'$ est donc cachée en projection frontale.

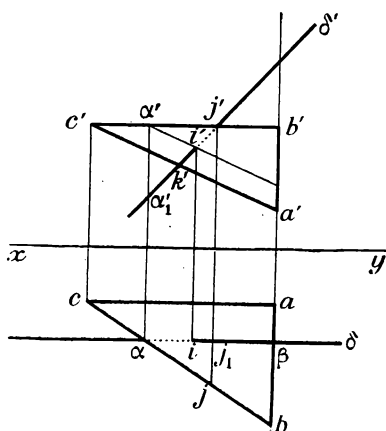
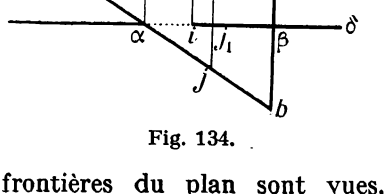


Fig. 134.

■ 53. Ponctuation d'une droite et d'une portion de plan. —

En pratique, un plan n'est pas indéfini. Les portions de la droite qui sont extérieures, en projection, aux frontières du plan sont vues.



L'épure n° 134 montre une plaque triangulaire ABC. Le côté AB est de profil, le côté AC est frontal, le côté BC est horizontal. Cette plaque est opaque. On se propose de ponctuer la droite (Δ) frontale, par rapport à cette plaque.

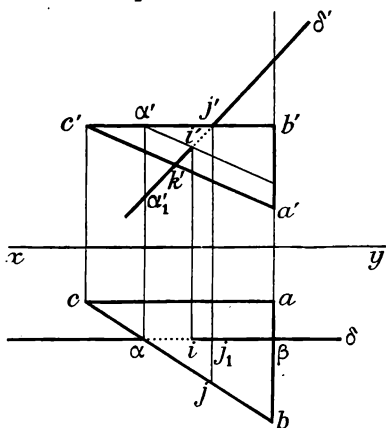


Fig. 134.

Les portions de (Δ) qui sont extérieures, dans les deux projections, au contour du triangle sont vues.

1° *Projection horizontale.* — La verticale du point α rencontre le plan en (α, α') sur BC et rencontre (Δ) en (α, α_1') de cote inférieure. Donc la portion $i\alpha$ est cachée. La portion $i\beta$ est vue.

2° *Projection frontale.* — La droite de bout du point j' rencontre le plan en (j, j') sur BC et rencontre (Δ) en (j_1, j') d'éloignement moindre. Donc la portion $i'j'$ est cachée. La portion $i'k'$ est vue.

● REMARQUE. — On constate que la ponctuation, une fois terminée, la représentation de l'ensemble fait comprendre la position relative des éléments. C'est de cette façon qu'il faut toujours opérer. *On ponctue selon les règles énoncées et on essaie de voir après.* Faire l'inverse peut conduire à des erreurs.

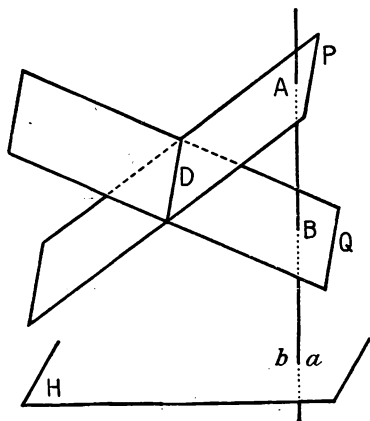


Fig. 135.

■ 54. Ponctuation de deux plans illimités opaques. —

Étudions seulement la projection horizontale. Une verticale rencontre les deux plans (P) et (Q) respectivement en A et

B; celui qui a la plus grande cote, soit A, est vu en projection horizontale, l'autre est caché. Il en sera de même tant que A restera dans le même demi-plan. Au contraire, les points de l'autre demi-plan sont cachés. Ainsi, un seul essai suffira pour ponctuer. On notera que la droite (D) d'intersection est vue sur les deux projections (fig. 135).

■ 55. **Ponctuation de deux portions de plans opaques.** — En pratique, les plans qui interviendront dans les représentations ne seront pas illimités. Il faudra alors ponctuer les frontières de chaque portion de plan par rapport à l'autre plan.

Considérons, par exemple, la plaque MNPQ (les côtés MN et PQ sont de profil, les côtés MQ et NP sont frontaux, MNPQ est un parallélogramme) et la plaque triangulaire ABC (AB de profil, BC parallèle à la ligne de terre) (fig. 136).

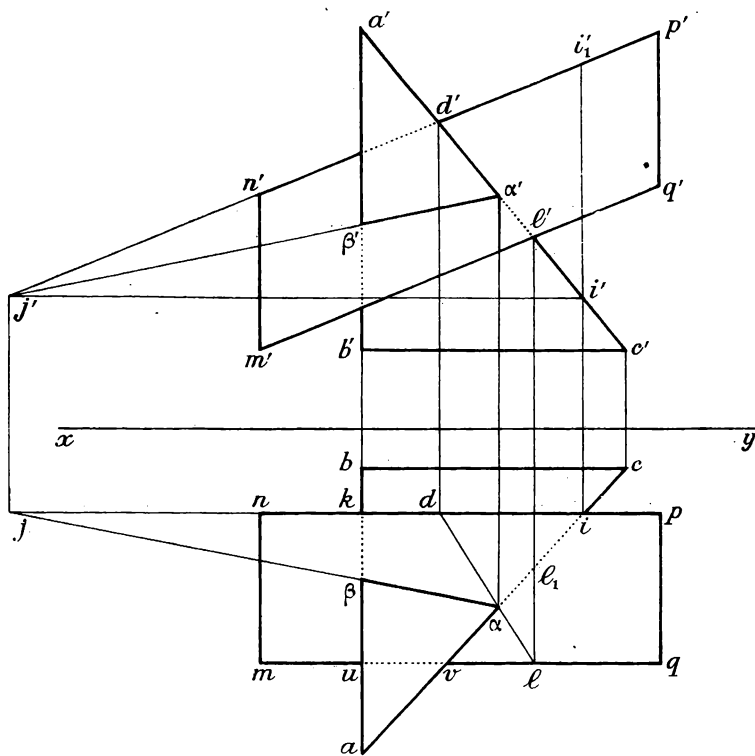


Fig. 136.

1° *Intersection des deux plans.* — En coupant par le plan de bout projetant AC, on obtient dans le plan MNPQ la droite (dl' d'l') qui coupe AC en (α , α'). Le second plan auxiliaire choisi

est le plan frontal projetant NP. Il coupe le plan ABC suivant la frontale du point I. On en conclut un second point d'intersection (j, j') des deux plans. La droite joignant ce point au point (α, α') est la droite commune aux deux plans. Nous n'en conservons que la portion ($\alpha\beta, \alpha'\beta'$) intérieure au triangle ABC.

2° *Ponctuation de la projection horizontale.* — La verticale du point (i, i') coupe le plan ABC en (i, i') et coupe NP en (i, i'_1) de cote supérieure. Donc le côté NP est vu en projection horizontale et la portion αi de AC est cachée; donc la portion αv est vue. Puisque αi est cachée, la portion βk du même demi-plan est aussi cachée. La portion βu est vue. En conséquence la portion uv de MQ est cachée.

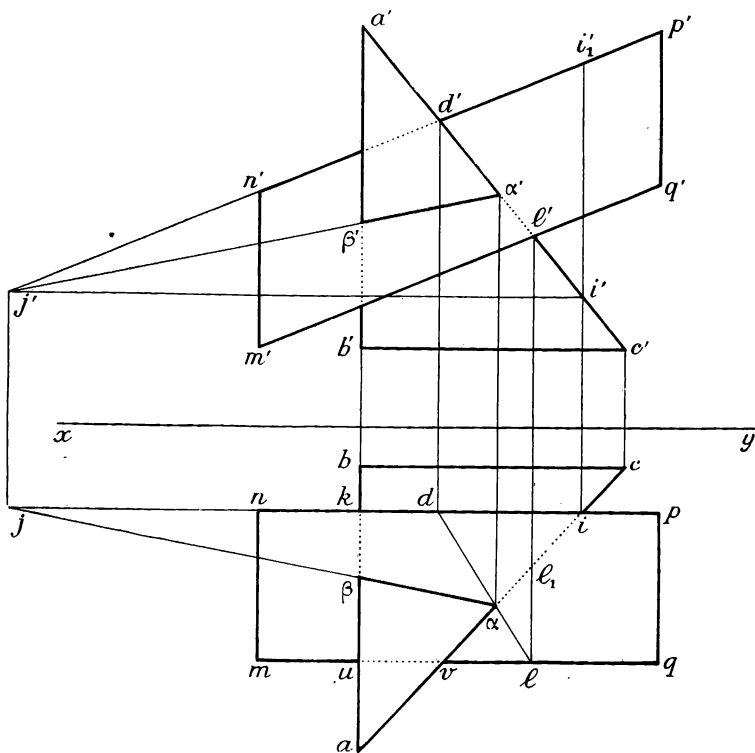


Fig. 136.

3° *Ponctuation de la projection frontale.* — Un seul essai suffira. La droite de bout du point l' coupe MQ en (l, l') et coupe AC en (l_1, l') d'éloignement moindre, donc $m'q'$ est vue et $\alpha'l'$ est cachée. On en déduit, comme précédemment, le reste de la ponctuation.

5

DROITES ET PLANS
PERPENDICULAIRES

■ **56. Rappel de propriétés géométriques.** — L'étude des droites et plans perpendiculaires, en géométrie descriptive, repose sur les propriétés suivantes, qui ont été établies en géométrie.

- 1° Par définition, une droite est dite perpendiculaire à un plan si elle est perpendiculaire à toutes les droites du plan. On dit aussi que le plan est perpendiculaire à la droite.
- 2° Pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan, il suffit qu'elle soit perpendiculaire à deux droites non parallèles du plan.
- 3° Si un angle droit a un côté parallèle à un plan (et si l'autre n'est pas perpendiculaire au plan) il se projette orthogonalement, sur ce plan, suivant un angle droit.
La même conclusion subsiste si un côté de l'angle droit est dans le plan de projection au lieu de lui être parallèle.
- 4° Si un angle, ayant un côté parallèle à un plan, se projette orthogonalement, sur ce plan, suivant un angle droit, cet angle est droit.

■ **57. Droite perpendiculaire à un plan.** — Si une droite (D) est perpendiculaire à un plan, elle est perpendiculaire aux horizontales et aux frontales du plan.

Nous supposons que ces horizontales et ces frontales sont bien déterminées et sont distinctes donc que le plan n'est pas parallèle à la ligne de terre.

Comme la droite (D) est perpendiculaire aux horizontales, l'angle droit, ainsi formé, se projette horizontalement suivant un angle droit. La projection horizontale de la droite est donc perpendiculaire aux projections horizontales des horizontales du plan.

Comme la droite (D) est perpendiculaire aux frontales, l'angle droit ainsi formé se projette frontalement suivant un angle droit. La projection frontale de la droite est donc perpendiculaire aux projections frontales des frontales du plan.

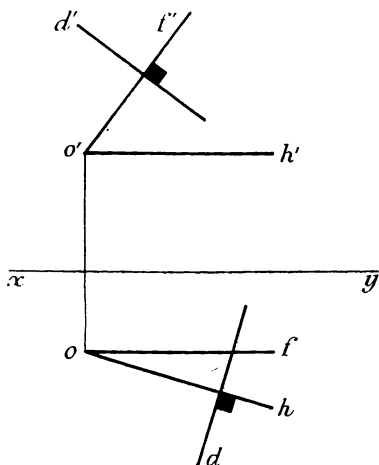


Fig. 137.

Réciproquement, définissons un plan par une horizontale (oh , $o'h'$) et une frontale (of , $o'f'$) distincte de l'horizontale.

Donnons-nous une droite (d , d') telle que (d) soit perpendiculaire à oh et (d') soit perpendiculaire à $o'f'$ (fig. 137). La droite (D) est alors (propriété 4^o du § 56) perpendiculaire aux horizontales et aux frontales du plan. Elle est donc perpendiculaire au plan puisque les horizontales du plan ne sont pas parallèles aux frontales.

Nous énonçons :

Théorème. — La condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite, non de profil, soit perpendiculaire à un plan (non parallèle à la ligne de terre) est que sa projection horizontale soit perpendiculaire à la projection horizontale d'une horizontale du plan et que sa projection frontale soit perpendiculaire à la projection frontale d'une frontale du plan.

Il est commode d'utiliser les traces du plan si on les connaît.

● **CAS PARTICULIERS.** — 1^o Si le plan est horizontal, toute perpendiculaire est verticale.

2^o Si le plan est frontal, toute perpendiculaire est de bout.

3^o Si le plan est parallèle à la ligne de terre, toute perpendiculaire est de profil; elle n'est plus déterminée par ses deux projections.

■ **58. Problème I.** — Mener, par un point donné, la perpendiculaire à un plan donné.

Soit à mener, du point (m , m'), la perpendiculaire au plan défini par les droites concourantes (oa , $o'a'$) et (ob , $o'b'$) (fig. 138).

Construisons d'abord l'horizontale (ac , $a'c'$) du plan et la

frontale ($cd, c'd'$). Il suffit alors de mener ml perpendiculaire à ac et de mener $m'l'$ perpendiculaire à $c'd'$ et on a ainsi les deux projections ($ml, m'l'$) de la perpendiculaire cherchée.

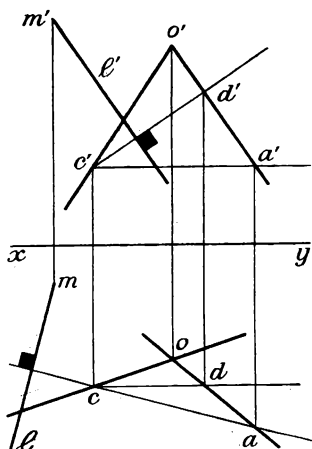


Fig. 138.

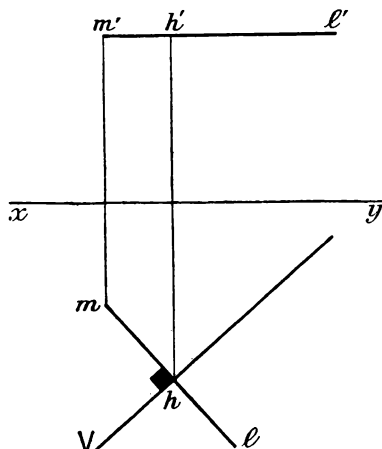


Fig. 139.

● CAS PARTICULIERS. — 1° *Le plan donné est perpendiculaire à l'un des plans de projection.*

Soit à mener du point (m, m') la perpendiculaire au plan vertical (V) (fig. 139). Cette perpendiculaire est horizontale. Sa projection horizontale est perpendiculaire à la trace horizontale du plan (V). On obtient la droite ($ml, m'l'$). Elle coupe le plan (V) au point (h, h'). La distance des deux points M et H est égale à la longueur du segment mh puisque MH est horizontale.

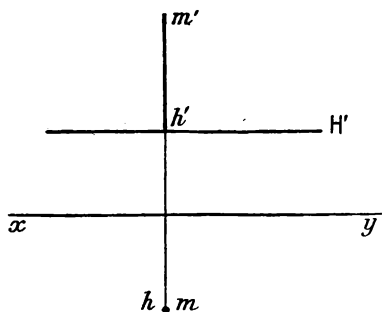


Fig. 140.

Si le plan donné est frontal ou horizontal, la construction à faire est évidente; sur la figure 140 on a construit la perpendiculaire menée de M à un plan horizontal.

2° *Le plan est parallèle à la ligne de terre.*

La perpendiculaire cherchée est de profil. Il faudra utiliser des méthodes particulières que nous étudierons plus loin (n° 96).

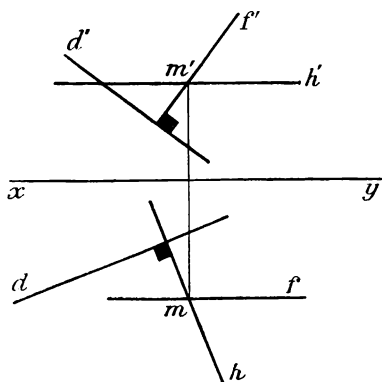


Fig. 141.

■ 59. Problème II. — *Mener, par un point donné, le plan perpendiculaire à une droite donnée.*

Soit à mener (fig. 141), par le point (m, m') , le plan perpendiculaire à la droite (d, d') . Le plan cherché contient l'horizontale $(mh, m'h')$ obtenue en menant mh perpendiculaire à (d) . Il contient la frontale $(mf, m'f')$ obtenue en menant $m'f'$ perpendiculaire à (d') . Les droites MH et MF déterminent le plan cherché.

● CAS PARTICULIERS. — 1° *La droite est parallèle à l'un des plans de projection.*

Soit à mener (fig. 142) par le point (m, m') le plan perpendi-

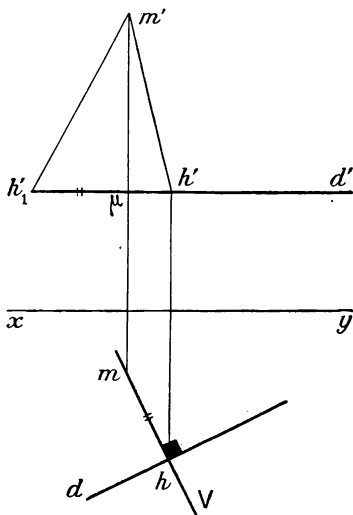


Fig. 142.

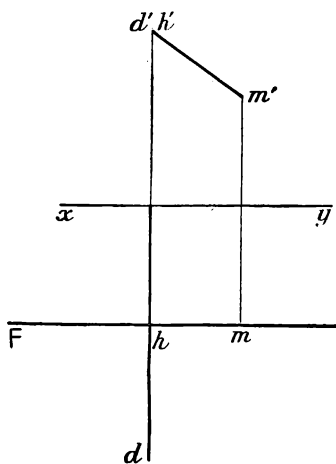


Fig. 143.

culaire à l'horizontale (d, d') . Ce plan est vertical. Sa trace horizontale est la perpendiculaire (V) menée à (d) par m . Il coupe la droite donnée au point (h, h') .

On peut obtenir la distance du point M à la droite en cherchant la distance des deux points M et H (n° 19) : on porte sur (d') la longueur $\mu h'_1 = mh$; la distance cherchée est $m'h'_1$.

Si la droite est verticale ou de bout, la construction à faire est évidente. Sur la figure 143 on a construit le plan frontal (F) mené par M perpendi-

culairement à la droite de bout (d, d'). Ce plan (F) coupe (D) en H (h, h'). La distance du point M à la droite (D) est $m'h'$.

2° La droite est de profil.

Le plan cherché est parallèle à la ligne de terre. Il faudra utiliser des méthodes particulières (nos 69 et 95).

■ 60. Plans perpendiculaires. — Pour que deux plans soient perpendiculaires, il faut et il suffit que l'un d'eux contienne une droite perpendiculaire à l'autre. Il en résulte que les plans passant par un point M et perpendiculaires à un plan donné (P) contiennent la perpendiculaire MH menée de M à (P).

EXEMPLE. — Mener par une droite donnée (d, d'), le plan perpendiculaire à un plan donné $P\alpha Q'$ non perpendiculaire à (D) (fig. 144).

Prenons un point A (a, a') sur (D). Le plan cherché est déterminé par la droite (D) et par la perpendiculaire AB menée de A au plan donné : ab est perpendiculaire à αP et $a'b'$ est perpendiculaire à $\alpha'Q'$.

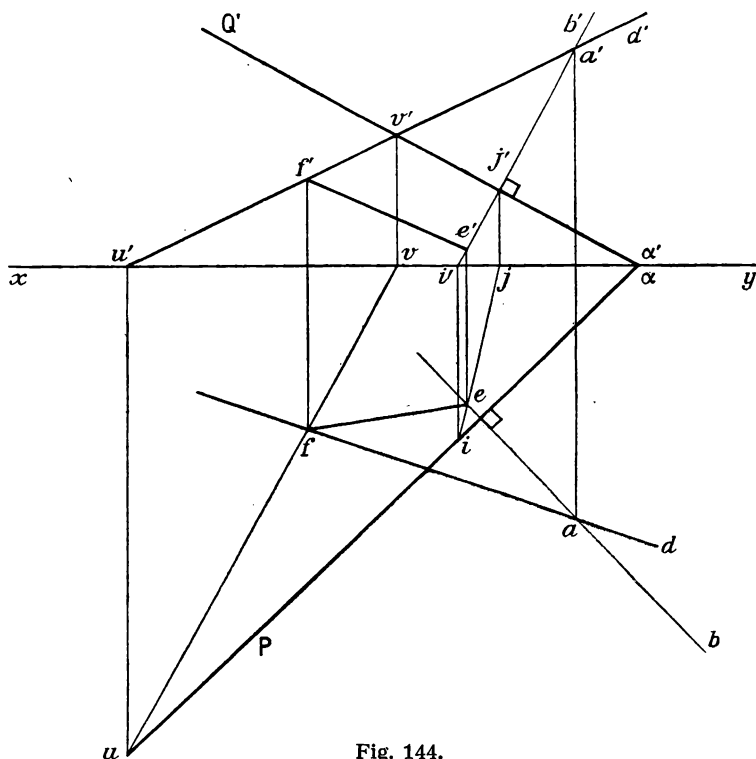


Fig. 144.

La projection orthogonale de (D) sur le plan $P\alpha Q'$ est l'intersection de ce plan avec le plan DAB. Sur la figure 144 on a obtenu la droite EF qui joint les points d'intersection respectifs E et F du plan et des droites AB et AD.

EXERCICES

89. — Démêler, parmi les propositions qui suivent, celles qui sont exactes et celles qui sont fausses :

Toute perpendiculaire à un plan vertical est une horizontale.

Tout plan perpendiculaire à un plan de bout est vertical.

Tout plan perpendiculaire à un plan horizontal est vertical.

Tout plan perpendiculaire à un plan vertical est horizontal.

Tout plan perpendiculaire au second bissecteur est parallèle au premier bissecteur.

Toute horizontale est perpendiculaire à toute frontale.

Toute verticale est perpendiculaire à toute droite de bout.

Toute droite parallèle au plan horizontal est perpendiculaire au plan frontal.

Toute droite perpendiculaire au premier bissecteur est parallèle au second bissecteur.

90. — 1° Construire le plan médiateur du segment AB, connaissant les projections (a, a') et (b, b') de ses extrémités.

(On supposera que le segment AB n'est pas de profil et, en plus du cas général, on étudiera les cas où AB est horizontal ou vertical.)

2° Trouver sur une droite donnée (d, d') un point équidistant de A et de B.

91. — On donne un plan par ses traces et un point A (a, a') . Construire les projections du symétrique de A par rapport au plan :

1° lorsque le plan est de bout ;

2° dans le cas général.

92. — On donne une droite (d, d') et un point A (a, a') .

1° Construire les projections du symétrique du point par rapport à la droite ;

2° Construire les projections de la symétrique de la droite et du symétrique du point, par rapport à un plan vertical donné.

93. — On donne une droite D (d, d') . Construire une droite (Δ) , sachant qu'elle rencontre (D) à angle droit et connaissant sa projection horizontale (δ) .

94. — Par un point A (a, a') mener un plan vertical perpendiculaire à un plan donné (non horizontal).

95. — Mener, par un point donné, le plan perpendiculaire à deux plans donnés par leurs traces.

6

PERPENDICULAIRE
COMMUNE
À DEUX DROITES

■ **61. Méthode générale.** — On sait, qu'étant donné deux droites (D) et (Δ), non parallèles, il existe une droite AB qui les coupe toutes deux à angle droit¹ (fig. 145).

Pour construire cette droite, on en cherche d'abord la direction (L); c'est celle de la normale à un plan parallèle aux deux droites.

La perpendiculaire commune est alors la parallèle à cette direction s'appuyant sur les deux droites données. On est ainsi ramené à un problème traité au n° 49.

Nous retiendrons donc les deux étapes de la solution :

1° la *direction* de la perpendiculaire commune;

2° la *position* de la perpendiculaire commune.

Les points A et B où la perpendiculaire commune rencontre (D) et (Δ) sont appelés les **pieds** de la perpendiculaire commune respectivement sur (D) et sur (Δ).

Le pied A, par exemple, peut s'obtenir par l'intersection de (D) avec le plan mené par (Δ) et parallèle à (L).

On démontre que la distance des pieds A et B est la plus courte des distances des points M et N pris respectivement sur (D) et sur (Δ). On dit que c'est **la plus courte distance** des deux droites. Cette distance peut se trouver sans avoir à construire la perpendiculaire commune AB. En effet, la distance BA est la distance du point B au plan (P) mené par (D) parallèlement à (Δ). C'est aussi la distance NH de tout point N de (Δ) au plan (P).

On notera bien qu'il ne faut pas confondre :

la perpendiculaire commune qui est une *droite*
et la plus courte distance qui est une *distance*.

Nous traiterons d'abord quelques cas particuliers simples.

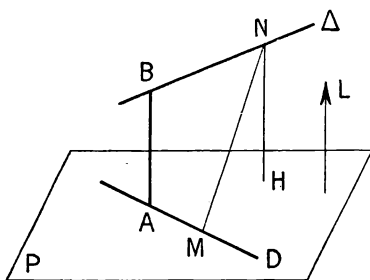


Fig. 145.

■ 62. Cas particuliers. — I. *L'une des droites est perpendiculaire à un plan de projection* (fig. 146). Soit une droite verticale (d, d') et une droite quelconque (δ, δ').

1° *Direction*. — La perpendiculaire commune, étant perpendiculaire à une verticale, est une horizontale. Par suite, l'angle droit qu'elle fait avec (Δ) se conserve en projection horizontale. D'où la direction (l, l').

2° *Position*. — On a la projection horizontale de la perpendiculaire commune en menant de d la perpendiculaire à (δ). On en conclut le pied (b, b') sur (Δ), d'où la droite cherchée qui est l'horizontale du point B. Elle coupe (D) en A (a, a').

3° *Plus courte distance*. — La distance AB est la longueur du segment ab , puisque AB est horizontal. Cette distance aurait pu s'obtenir avant toute construction : c'est la distance d'un point quelconque de (D) au plan vertical projetant (Δ).

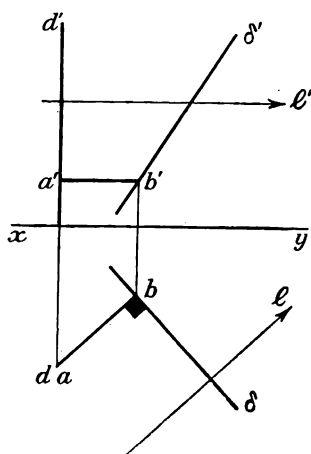


Fig. 146.

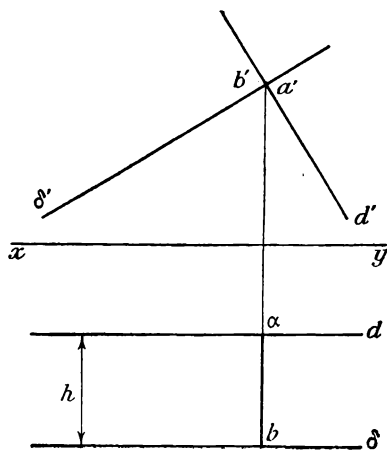


Fig. 147.

II. *Les deux droites sont parallèles à un plan de projection* (fig. 147). Soit les deux frontales (d, d') et (δ, δ').

1° *Plus courte distance*. — C'est la distance d'un point quelconque de (D) au plan frontal projetant (Δ), donc c'est la différence h des éloignements de (d) et (δ).

2° *Direction*. — Tout plan parallèle aux deux droites étant de front, la perpendiculaire commune est de bout.

3° Position. — La droite de bout qui rencontre les deux droites a pour projection frontale le point commun à (d') et (δ') . On en déduit la projection horizontale ainsi que les pieds (a, a') sur (D) et (b, b') sur (Δ) .

III. Les deux droites ont leurs projections horizontales parallèles (fig. 148). Soit les deux droites (d, d') et (δ, δ') telles que (d) et (δ) soient parallèles.

1° Plus courte distance. — Tout plan parallèle aux deux droites est vertical. La plus courte distance est donc la distance h des projections horizontales (d) et (δ) .

2° Direction. — La perpendiculaire commune est perpendiculaire au plan vertical projetant (d) . C'est une horizontale. Soit la direction (l, l') .

3° Position. — A une position ou de la perpendiculaire commune aux deux plans verticaux (d) et (δ) correspond, en projection frontale, le segment $o'u'$. Ce segment représente la longueur de la projection frontale de perpendiculaire commune aux deux droites (D) et (Δ) .

Il suffit de lui faire subir une translation parallèle à (d') pour l'amener en $a'b'$. On en déduit a et b par lignes de rappel.

La droite AB est la perpendiculaire commune.

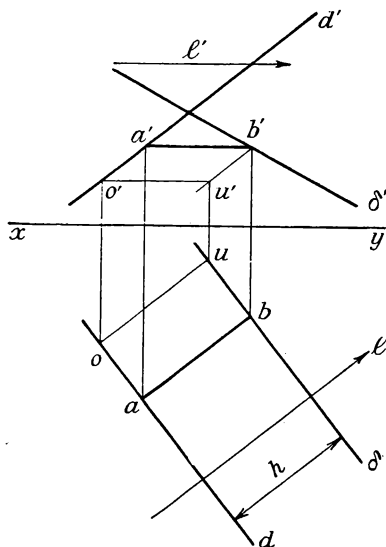


Fig. 148.

■ **63. Cas général.** — Soit deux droites (d, d') et (δ, δ') (fig. 149).

1° Direction. — Menons par un point (o, o') de (D) la parallèle $(ok, o'k')$ à (δ, δ') . La direction (l, l') de la perpendiculaire commune est la normale au plan DOK : on obtient cette direction à l'aide de l'horizontale $(\alpha\beta, \alpha'\beta')$ et de la frontale $(\alpha\gamma, \alpha'\gamma')$ de ce plan. On obtient ainsi la direction $(ol, o'l')$.

2° Position. — Il faut maintenant mener une droite parallèle à (l, l') et s'appuyant sur les deux droites données. La droite cherchée est dans le plan DOL . Cherchons l'intersection de ce

EXERCICES SUR LE CHAPITRE III

Déterminer l'intersection de deux plans dans les cas suivants :

96. — Un plan passe par une droite donnée (d, d') et il est parallèle à la ligne de terre. L'autre plan est le premier (ou le second) bissecteur.

97. — Un plan $P \propto Q'$ est défini par ses traces. L'autre $R \propto S'$ est aussi défini par ses traces de façon que R est confondue avec Q' et S' est confondue avec P .

98. — Un plan est défini par ses traces. L'autre plan est défini par deux droites (d, d') et (δ, δ') telles que (d) et (δ') sont confondues, ainsi que (d') et (δ).

99. — Un plan est défini par une droite de profil et un point. L'autre plan est un plan bissecteur.

100. — Les deux plans sont quelconques et définis par des droites concourantes. On utilisera comme plans auxiliaires : un plan horizontal et le second bissecteur.

Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan dans les cas suivants :

101. — Le plan est défini par un point $A (a, a')$ et une droite $D (d, d')$. La droite (δ, δ') est telle que (δ) est confondue avec (d') et (δ') est confondue avec (d).

102. — Le plan est défini par une droite de profil et un point. La droite est de profil.

103. — Par un point donné A , situé dans un plan donné (P), mener dans ce plan une droite parallèle à un autre plan donné (Q). Donner la solution géométrique et faire l'épure dans le cas où (P) est donné par ses traces et où (Q) est le second plan bissecteur.

104. — On donne un plan par ses traces.

1° Construire une horizontale quelconque (h, h') de ce plan.

2° Les projections (h) et (h') de cette droite, prolongées s'il le faut, se coupent en un point A de la feuille. Lieu de A quand la cote de l'horizontale varie.

3° Construire l'horizontale (h, h') dont les projections se coupent sur un cercle tracé sur la feuille de papier.

105. — Construire le point commun à trois plans définis chacun par une horizontale et un point, les trois points ayant même cote.

106. — On donne trois droites, non situées deux à deux dans un même plan et dont l'une est verticale. Mener une droite rencontrant ces trois droites, connaissant la direction de sa projection horizontale.

107. — 1° Montrer que les plans équidistants de deux points donnés A et B sont parallèles à AB ou passent par le milieu du segment AB .

2° Mener, par une droite donnée (d, d'), un plan équidistant de deux points donnés (a, a') et (b, b').

3° Mener, par un point donné (o, o'), un plan équidistant de trois points donnés (a, a'); (b, b'); (c, c').

4° Construire un plan équidistant de quatre points donnés. Nombre de solutions.

108. — On donne quatre points : A, B, C, D . Mener un plan par chaque point de manière que les plans obtenus soient parallèles et équidistants. (On cherchera à déterminer les points de rencontre des droites BC et BD avec le plan passant par A .) Nombre de solutions.

109. — Mener, par un point donné A, une droite (L) rencontrant une droite donnée (D) et orthogonale à une autre droite donnée (Δ) (les droites (L) et (Δ) ne se rencontrent pas).

110. — On donne une droite (d, d'). Mener, par un point A (a, a') de cette droite, une droite de profil orthogonale à (d, d').

111. — Trouver, sur une droite donnée, un point équidistant de deux horizontales données, situées dans un même plan horizontal.

112. — On donne deux plans (P) et (Q) verticaux. Soit D (d, d') une droite donnée du plan (P). Mener par (D) un plan coupant (Q) suivant une droite orthogonale à (D).

Déterminer les projections de la perpendiculaire commune à deux droites et évaluer leur plus courte distance dans les cas suivants :

113. — Les deux droites sont horizontales.

114. — L'une d'elles est de bout.

115. — L'une est horizontale, l'autre est frontale.

116. — Mener par un point A (a, a') une droite (D), sachant que :

1° elle se trouve dans un plan de bout donné, passant par A;

2° la plus courte distance de (D) et d'une verticale donnée (Δ) est égale à une longueur donnée.

117. Trièdre trirectangle. — 1° On donne, dans le plan horizontal de projection, un triangle ABC dont le côté BC est de bout. Construire les projections d'un point S tel que le trièdre SABC soit trirectangle (on montrera d'abord que la projection horizontale s de S est confondue avec l'orthocentre du triangle ABC);

2° même question, le côté BC n'étant plus de bout.

3° Construire un trièdre trirectangle dans les deux cas suivants :

α) On donne le sommet S, une arête SA et la trace horizontale d'une des faces qui passent par SA.

β) On donne le sommet S, une arête SA et la projection horizontale sb de l'arête SB.

118. — On donne un triangle ABC dans un plan horizontal de projection; sur la verticale passant par l'orthocentre H on prend un point S quelconque. Construire les projections du trièdre $SA_1B_1C_1$ supplémentaire du trièdre SABC (voir *cours de Géométrie*, n° 75). Comparer les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ sections des trièdres par le plan horizontal.

119. — *Plans perpendiculaires aux bissecteurs.*

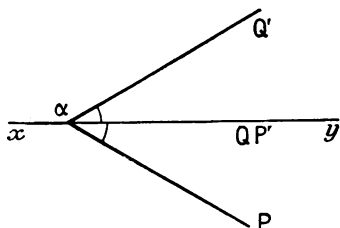
1° Dessiner les projections d'une droite (δ, δ') parallèle au premier plan bissecteur.

2° Mener par un point (o, o') donné le plan perpendiculaire à (δ, δ'). Ce plan est perpendiculaire au premier plan bissecteur.

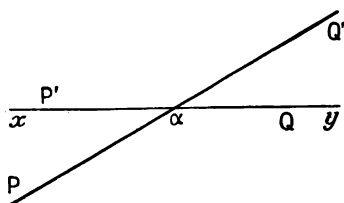
3° Opérer de la même façon avec le second plan bissecteur et démontrer les théorèmes suivants :

I. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un plan $P\alpha Q'$ soit perpendiculaire au premier bissecteur est que les deux projections P et Q' de ses traces soient symétriques par rapport à la ligne de terre.

II. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un plan $P\alpha Q'$ soit perpendiculaire au second bissecteur est que les projections P et Q' de ses traces soient confondues.



Plan perpendiculaire
au premier bissecteur.



Plan perpendiculaire
au second bissecteur

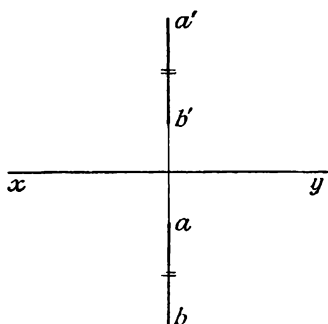
120. — *Droites perpendiculaires aux bissecteurs.*

1° On considère un plan $P\alpha Q'$ perpendiculaire au premier bissecteur et on le coupe par un plan de profil. L'intersection est une droite perpendiculaire au premier bissecteur.

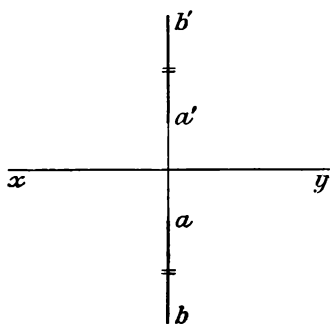
2° Opérer de la même façon avec le second plan bissecteur et démontrer les théorèmes suivants :

I. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite soit perpendiculaire au premier bissecteur est qu'elle soit de profil et que les projections d'un vecteur de cette droite soient des vecteurs équipollents.

II. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite soit perpendiculaire au second bissecteur est qu'elle soit de profil et que les projections d'un vecteur de cette droite soient des vecteurs opposés.



Droite perpendiculaire
au premier bissecteur.



Droite perpendiculaire
au second bissecteur.

121. — Construire les projections du symétrique d'un point donné $A(a, a')$ par rapport au second bissecteur.

122. — Construire l'intersection de deux plans perpendiculaires au second bissecteur, définis tous deux par leurs traces.

123. — Intersection d'une droite de profil et d'un plan perpendiculaire au second bissecteur.

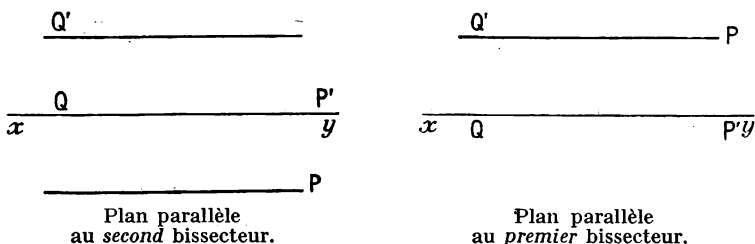
124. — Mener une droite perpendiculaire au second bissecteur et rencontrant deux droites données (dont l'une est la ligne de terre).

125. — Construire la perpendiculaire commune à deux droites parallèles au premier bissecteur ou parallèles au second bissecteur.

126. — *Plans parallèles aux bissecteurs.*

1° Mener par un point (o , o') une droite parallèle au second bissecteur et construire sa trace horizontale (a , a') et sa trace frontale (b , b'). En déduire que les projections des traces P et Q' d'un plan parallèle au second bissecteur sont symétriques par rapport à la ligne de terre.

2° Opérer de la même façon pour un plan parallèle au premier bissecteur et démontrer que les projections de ses traces P et Q' sont confondues.



ÉPURES

127. — On considère deux plaques opaques ayant la forme de parallélogrammes ABCD et MNPQ. Elles sont définies par les coordonnées, en centimètres, de leurs sommets.

	A	B	C	D	M	N	P	Q
x	0	7	7	0	0	0	4	4
y	— 7	— 3	2	— 2	8	2	— 7	— 1
z	0	0	7	7	0	10	10	0

Déterminer l'intersection des plans des deux plaques et représenter l'ensemble de ces plaques, avec la ponctuation convenable.

128. — On considère deux plaques opaques ayant l'une la forme d'un parallélogramme ABCD et l'autre la forme d'un triangle MNP. Elles sont définies par les coordonnées, en centimètres, de leurs sommets.

	A	B	C	D	M	N	P
x	9	12,5	5,5	2	9	9	5
y	— 7	0	3,5	— 3,5	— 3,5	7	0
z	5	5	9	9	1	5	11

Nature du parallélogramme $abcd$.

Déterminer l'intersection des plans des deux plaques et représenter l'ensemble des deux plaques, avec la ponctuation convenable.

CHAPITRE IV

TRANSFORMATION DES PROJECTIONS

- 1. *Changement de plan.*
- 2. *Rotation.*
- 3. *Rabattement.*
- 4. *Problèmes de distances et d'angles.*

1

CHANGEMENT DE PLAN

■ 64. **Disposition des données.** — On a pu constater que l'exécution d'une épure présente parfois des difficultés parce que les données occupent, par rapport aux plans de projection, des positions particulières défavorables. C'est ainsi qu'il est immédiat de marquer un point sur une droite donnée à l'aide d'une ligne de rappel et que ce procédé ne réussit plus pour une droite de profil.

En revanche, une disposition particulière des données peut faciliter l'exécution d'une épure. C'est ainsi que pour trouver la distance d'un point A à une droite (D), la méthode générale consiste à mener par A le plan (P) perpendiculaire à (D), à chercher l'intersection B de (P) et de (D) et à évaluer la distance AB. Les tracés nécessaires à ces opérations sont simplifiés si la droite (D) est frontale, car l'angle $\widehat{ABD}$ se projette frontalement suivant un angle droit; le point B (b, b') se construit donc très facilement (fig. 150).

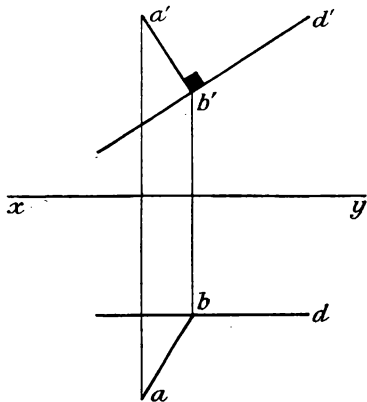


Fig. 150.

Rappelons aussi que certaines constructions planes, telles que la construction de la bissectrice d'un angle, ne sont commodes

à exécuter que si le plan dans lequel elles doivent se faire est parallèle à un plan de projection.

Pour faire cesser des particularités défavorables ou pour créer, au contraire, des particularités favorables, ou pour permettre des constructions planes, on est amené à envisager trois méthodes :

1^o Laisser la figure fixe et modifier les plans de projection : c'est la méthode de **changement de plan**.

2^o Conserver les plans de projection et déplacer la figure. On choisit un déplacement simple. La translation ne présente pas d'intérêt, car elle ne change pas les directions. On fait appel à la **rotation**.

3^o Dans le cas particulier où l'axe de rotation (Δ) est horizontal, on pourra amener un plan passant par (Δ) à être horizontal. On obtient la **méthode du rabattement**.

■ **65. Changement de plan.** — Un point M est repéré par rapport à deux plans rectangulaires (H) et (F). On se propose de le repérer par rapport à un nouveau système de plans rectangulaires formés par l'un des plans (H) ou (F) et un autre plan perpendiculaire à celui des plans qui a été conservé.

Définitions.

● **Faire un changement de plan frontal**, c'est prendre pour nouveau plan frontal de projection un plan vertical quelconque, le plan horizontal de projection n'étant pas modifié.

● **Faire un changement de plan horizontal**, c'est prendre pour nouveau plan horizontal de projection un plan de bout quelconque, le plan frontal de projection n'étant pas modifié.

On notera que, dans le changement de plan frontal, le nouveau plan frontal de projection n'est pas frontal dans le premier système : il est vertical. De même, dans le changement de plan horizontal, le nouveau plan horizontal de projection n'est pas horizontal dans le premier système : il est de bout. Cette remarque donne toute son importance à la définition abstraite des plans de projection, indépendamment de toute représentation concrète : en particulier, le mot horizontal n'a plus de signification en correspondance avec la notion physique.

■ **66. Changement de plan pour un point.** — 1^o **Changement de plan frontal.** Le plan horizontal est conservé, donc la projection horizontale a d'un point (a, a') ne change pas (fig. 151).

La trace horizontale x_1y_1 du nouveau plan frontal est la nouvelle ligne de terre. La nouvelle projection frontale a'_1 est sur la nouvelle ligne de rappel, c'est-à-dire sur la perpendiculaire menée de a à x_1y_1 . En outre, le plan horizontal étant conservé, la dis-

tance du point A à ce plan, c'est-à-dire la valeur absolue de la cote du point, est conservée. Nous prendrons donc la nouvelle projection frontale du point A, de façon que les longueurs $\alpha a'$ et $\alpha_1 a'_1$ soient égales.

Il importe peu de porter la longueur $\alpha_1 a'_1 = \alpha a'$ dans un sens ou dans l'autre. En effet, si on fait une figure dans l'espace (fig. 152), le sens dans lequel on rabat le nouveau plan frontal (V) sur le plan horizontal (H) est arbitraire. L'essentiel est de le fixer une fois

pour toutes. Lorsqu'on fait un changement de plan pour plusieurs points A, B, C, le changement de plan pour A, de cote non nulle, peut se faire de deux façons. On choisit l'une d'elles et alors il n'y a plus d'ambiguïté pour les autres points. Tous les points ayant des cotes positives dans le premier système se rappellent d'un certain côté de $x_1 y_1$; tous les points ayant des cotes négatives dans le premier système se rappellent de l'autre côté.

Sur la figure 151, on a fait le changement de plan pour le point A (a, a') et pour le point B (b, b').

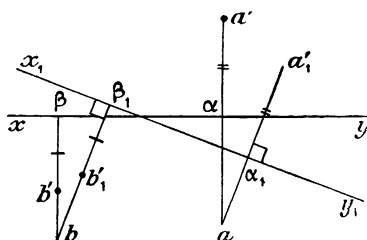


Fig. 151. — Changement de plan frontal pour un point.

A : $\alpha a' = \alpha_1 a'_1$; B : $\beta b' = \beta_1 b'_1$.

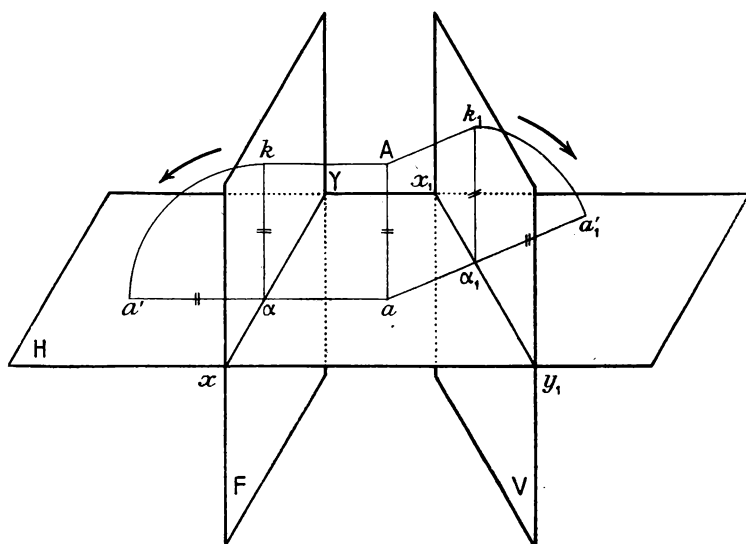


Fig. 152.

Sous réserve des explications qui viennent d'être données, nous retiendrons que :

→ Dans un changement de plan frontal :

la projection horizontale d'un point est inchangée;

la cote d'un point est conservée;

les deux projections d'un point sont sur une ligne de rappel perpendiculaire à la nouvelle ligne de terre.

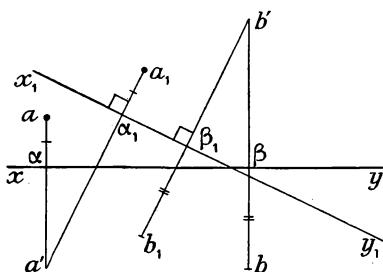


Fig. 153. — Changement du plan horizontal pour un point.

A : $aa = a_1a_1$; B : $\beta b = \beta_1b_1$

2° *Changement de plan horizontal.* — On verrait pareillement que :

→ Dans un changement de plan horizontal :

la projection frontale d'un point est inchangée;

l'éloignement d'un point est conservé;

les deux projections d'un point sont sur une ligne de rappel perpendiculaire à la nouvelle ligne de terre.

L'épure 153 montre un changement de plan horizontal pour les points A (a, a') et B (b, b').

■ 67. **Changement de plan pour une droite.** — Pour effectuer un changement de plan pour une droite, on effectue les constructions précédentes pour deux points de la droite. On choisira des points qui simplifient les tracés.

1° *Changement de plan frontal* (fig. 154). — Le plan horizontal de projection étant conservé, nous avons intérêt à utiliser la trace horizontale (a, a') de la droite (d, d'). La nouvelle ligne de terre étant x_1y_1 , la nouvelle projection frontale a'_1 de A est sur x_1y_1 puisque la cote de A est nulle. Nous avons fait ensuite le changement de plan pour un autre point quelconque B (b, b') : sa nouvelle projection frontale est b'_1 . La nouvelle projection frontale (d'_1) de la droite est obtenue en joignant $a'_1b'_1$.

2° *Changement de plan horizontal* (fig. 155). — Le plan frontal de projection étant conservé, nous pourrions songer à utiliser la trace frontale de la droite. Elle n'est pas dans les limites de l'épure; aussi prendrons-nous deux points quelconques. La nouvelle ligne de terre étant x_1y_1 , nous avons fait le changement

de plan pour le point A (a, a'), puis pour le point B (b, b'). Les projections horizontales nouvelles sont a_1 et b_1 . En joignant ces points, nous obtenons la projection horizontale nouvelle (d_1) de la droite.

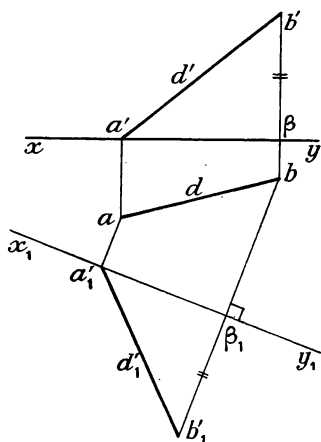


Fig. 154. — Changement de plan frontal pour une droite

$$\beta_1 b'_1 = \beta b'.$$

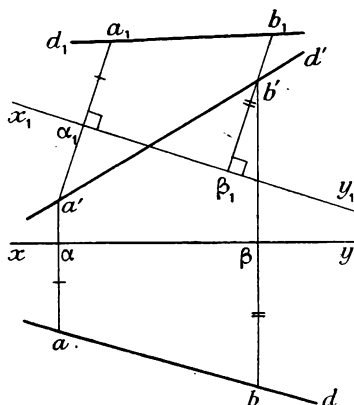


Fig. 155. — Changement de plan horizontal pour une droite

$$\alpha_1 a_1 = \alpha a \text{ et } \beta_1 b'_1 = \beta b.$$

■ 68. **Changement de plan pour un plan.** — Pour effectuer un changement de plan pour un plan, on effectue le changement de plan pour trois points du plan ou pour deux droites du plan. On choisira des éléments qui simplifient les tracés.

1° *Changement de plan frontal* (fig. 156). — Considérons le plan $P\alpha Q'$ défini par ses traces et soit x_1y_1 la nouvelle ligne de terre. Le plan horizontal étant conservé, la trace horizontale αP l'est également. Le changement de plan est donc tout fait pour cette droite : sa projection horizontale est P, sa nouvelle projection frontale est x_1y_1 . Il reste à faire le changement de plan pour un point. Choisissons un point A (a, a') du plan dont la projection horizontale a est sur x_1y_1 . La nouvelle projection frontale a'_1 s'obtient en portant $aa'_1 = \alpha a'$ sur la perpendiculaire

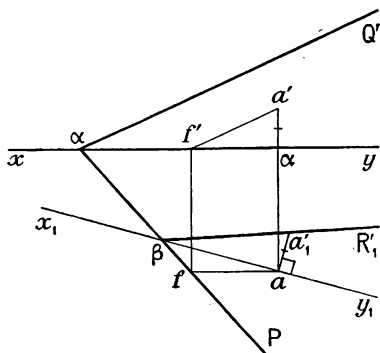


Fig. 156. — Changement de plan frontal pour un plan.

à x_1y_1 (dans un sens arbitraire). Ce point (a, a'_1) est un point de la nouvelle trace frontale du plan puisque sa projection horizontale a est sur x_1y_1 . On en déduit donc la nouvelle trace frontale $\beta a'_1$ (que nous appelons R'_1 et non pas Q'_1 parce que ce n'est pas la nouvelle projection de Q').

Le plan, dans le nouveau système, est $P\beta R'_1$.

On peut prendre le point a commun à xy et x_1y_1 (fig. 157), si les limites du dessin le permettent.

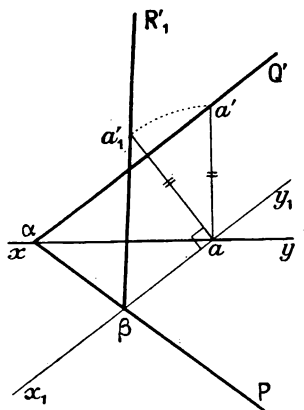


Fig. 157. — Changement de plan frontal pour un plan.

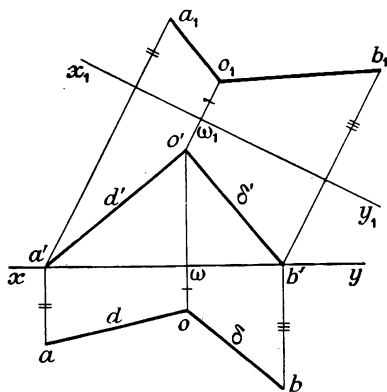


Fig. 158. — Changement de plan horizontal pour un plan.

2° *Changement de plan horizontal* (fig. 158). — Considérons un plan défini par deux droites (D) et (Δ) concourantes en O et soit x_1y_1 la nouvelle ligne de terre.

Nous ferons le changement de plan pour trois points. D'abord le point O dont la projection frontale o' est conservée; on obtient sa nouvelle projection horizontale o_1 . Nous choisirons ensuite les traces horizontales A (a, a') et B (b, b'), respectives de (D) et (Δ). Nous obtenons alors les nouvelles projections horizontales a_1 et b_1 . Les projections horizontales nouvelles de (D) et de (Δ) sont o_1a_1 et o_1b_1 .

■ 69. **Application à la droite de profil.** — Beaucoup de constructions générales sur la droite ne sont pas applicables à la droite de profil. Nous allons voir qu'à l'aide d'un changement de plan il n'y aura plus de difficulté.

Soit une droite de profil ($ab, a'b'$). Si l'on fait un changement de plan, frontal par exemple, cette droite a pour projections : ab et $a'_1b'_1$ et, dans cette position, elle n'est plus de profil. On peut

donc faire sur ces projections toutes les constructions désirables puis revenir ensuite au premier système (fig. 159).

En pratique, pour des raisons de commodité de tracés, on choisit la nouvelle ligne de terre x_1y_1 confondue avec les projections de la droite de profil. On peut alors, à volonté, considérer que l'on fait un changement de plan horizontal ou un

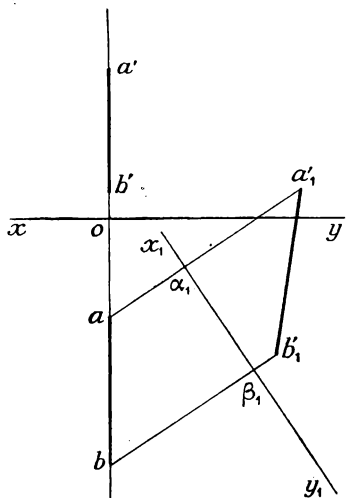


Fig. 159.

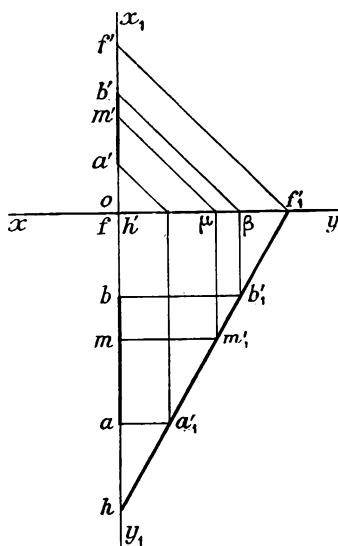


Fig. 160.

changement de plan frontal. Précisons en disant que nous faisons un changement de plan frontal. Les nouvelles projections de A (a , a') sont : a et a'_1 telles que $aa'_1 = oa'$ et les nouvelles projections de B (b , b') sont b et b'_1 telles que $bb'_1 = ob'$ (fig. 160).

Sur l'épure 160 on a porté ces longueurs égales à l'aide de l'équerre à 45° .

La droite de profil a donc pour projections : ab et $a'_1b'_1$. Dans le nouveau système de projections elle est *frontale*.

● PROBLÈMES. — I. Trouver la projection frontale m' d'un point dont on connaît sa projection horizontale m .

Le point m a pour nouvelle projection frontale m'_1 dont la cote est : $om' = mm'_1$. La construction est indiquée sur la figure 160 en menant $m'_1\mu$ perpendiculaire à xy puis $\mu m'$ à 45° .

Le problème inverse : trouver m connaissant m' se traite de la même façon. On mènera $m'\mu$ à 45° d'où m'_1 puis m . Les constructions faites sont celles qui serviraient à trouver l'ombre portée par la droite de profil sur le plan horizontal, les rayons lumineux étant frontaux à 45° .

Cas particulier. On déterminera les traces de la droite de profil sur les plans de projection. En effet, pour la trace horizontale, on connaît sa projection frontale h' ; pour la trace frontale, on connaît sa projection horizontale f . On a obtenu, sur l'épure 160, les points (h, h') et (f, f') .

II. Mener, par un point C (c, c'), le plan perpendiculaire à une droite de profil AB (fig. 161).

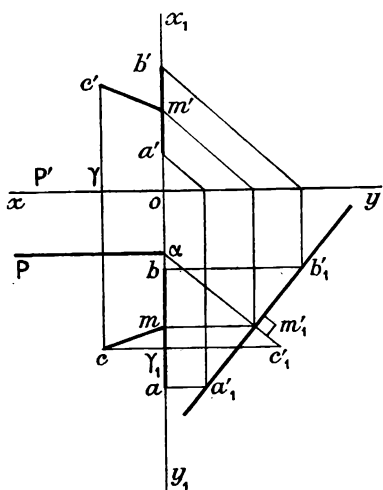


Fig. 161.

Faisons le changement de plan frontal indiqué : x_1y_1 sur ab . La droite de profil devient frontale en $(ab, a'_1b'_1)$. Le point C a pour nouvelles projections (c, c'_1) : $\gamma_1c'_1 = \gamma c'$ (du même côté de x_1y_1 que a'_1 et b'_1 puisque A, B, C ont des cotes de même signe). Dans le nouveau système, le plan cherché est de bout. On mène donc $c'_1m'_1$ perpendiculaire à $a'_1b'_1$, c'est la nouvelle trace frontale du plan cherché. En la prolongeant jusqu'en α sur x_1y_1 et en menant αP parallèle à xy , on obtient sa trace horizontale (dans les deux systèmes).

Le plan cherché est le plan défini par le point C et par l'horizontale (P, P') du plan horizontal de projection.

La projection orthogonale du point C sur la droite AB est projetée frontalement, dans le nouveau système de projection, en m'_1 . On en déduit sa projection horizontale m , par la ligne de rappel mm'_1 , puis sa projection frontale m' . On aurait la distance de C à AB en évaluant la distance des points C et M (n° 19).

■ 70. Problème I. — Rendre, par un changement de plan, une droite parallèle à un plan de projection. — Soit une droite D (d, d') et cherchons un changement de plan tel que dans le nouveau système la droite soit **frontale**, c'est-à-dire parallèle au nouveau plan frontal de projection. Il faut donc changer de plan frontal. Le nouveau plan frontal de projection doit être parallèle à la droite (D) et être perpendiculaire au plan horizontal conservé. Il est donc parallèle au plan vertical qui projette la droite horizontalement.

→ Pour rendre une droite **frontale**, on fait un changement de plan frontal tel que la nouvelle ligne de terre et la projection horizontale conservée de la droite soient parallèles ou confondues.

(La nouvelle ligne de terre x_1y_1 n'est définie qu'en direction.)

L'épure 162 montre les constructions. On a pris une ligne de terre x_1y_1 confondue avec (d) et on a fait le changement de plan pour deux points de la droite. La nouvelle projection frontale est $a'_1b'_1$.

● REMARQUE. — La droite étant rendue de front, la *distance* des deux points A et B est donnée, en projection frontale, par la longueur du segment $a'_1b'_1$.

Le plan horizontal n'ayant pas changé, l'angle de la droite (D) avec ce plan n'a pas changé non plus. Or, dans le nouveau système, cet angle est égal à l'angle aigu de $a'_1b'_1$ et de la nouvelle ligne de terre. L'angle de la droite (D) et du plan horizontal est donc égal à : $\theta = \widehat{aoa'_1}$.

On verrait, pareillement, que :

→ Pour rendre une droite **horizontale**, on fait un changement de plan horizontal tel que la nouvelle ligne de terre et la projection frontale conservée de la droite soient parallèles ou confondues.

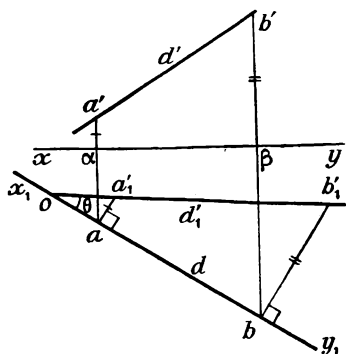


Fig. 162.

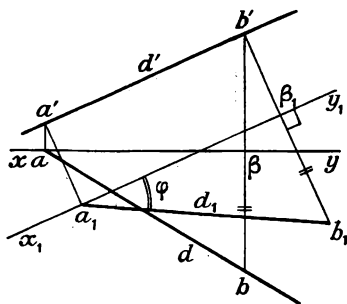


Fig. 163.

L'épure 163 montre les constructions. On a pris une nouvelle ligne de terre x_1y_1 parallèle à (d') . La projection horizontale nouvelle est a_1b_1 : on a utilisé la trace frontale de la droite dont on pouvait disposer. Comme précédemment, on obtient sur l'épure : la *distance* AB en a_1b_1 ;

l'angle de la droite et du plan frontal de projection en $\varphi = \widehat{b_1a_1\beta_1}$.

■ 71. **Problème II.** — *Peut-on, par changement de plan, rendre une droite perpendiculaire à un plan de projection?—* Soit une droite D (d, d') et cherchons à la rendre **verticale**, c'est-à-dire perpendiculaire au nouveau plan horizontal de projection (H_1). Il faut donc changer de plan horizontal et le choisir perpendiculaire à (D). Mais ce plan (H_1) doit aussi être perpendiculaire au plan frontal conservé. Le problème est impossible, en général, sauf si la droite (D) est déjà frontale.

→ Pour rendre **verticale** une frontale donnée, on fait un changement de plan horizontal en prenant un nouveau plan horizontal perpendiculaire à la droite.

Si la droite donnée n'est pas frontale, on doit faire d'abord un changement de plan frontal pour la rendre frontale (n° 70).

En général, il faut donc deux changements de plan successifs. Une telle construction est rarement effectuée. Sur l'épure 164, on a rendu verticale la frontale (d, d'). La ligne de terre x_1y_1 est perpendiculaire à (d') et on a fait le changement de plan pour un point A (a, a'). On a obtenu la verticale (d_1, d'_1).

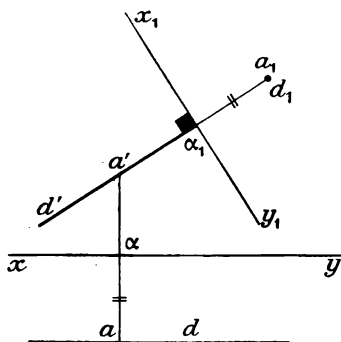


Fig. 164.

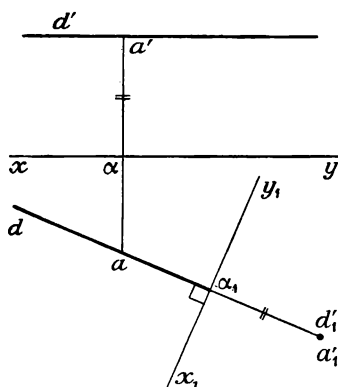


Fig. 165.

De la même façon :

→ Pour rendre **de bout** une horizontale donnée, on fait un changement de plan frontal en prenant un nouveau plan frontal perpendiculaire à la droite.

Si la droite donnée n'est pas horizontale, on doit faire d'abord un changement de plan horizontal pour la rendre horizontale (n° 70).

Sur l'épure 165, on a rendu de bout l'horizontale (d, d'). La ligne de terre x_1y_1 est perpendiculaire à (d) et on a fait le changement de plan pour un point A (a, a'). On a obtenu la droite (d, d'_1).

■ 72. Problème III. — *Rendre, par changement de plan, un plan perpendiculaire à un plan de projection.*

Pour qu'un plan soit de bout, il faut et il suffit qu'une horizontale du plan soit de bout.

→ Pour rendre un plan **de bout**, on fait un changement de plan frontal tel que la nouvelle ligne de terre soit perpendiculaire à la projection horizontale des horizontales du plan.

Sur l'épure 166, le plan est défini par ses traces $P\alpha Q'$. La nouvelle ligne de terre x_1y_1 est perpendiculaire à αP . On a fait le changement de plan pour le point (a, a') de la trace frontale. Ce point a pour nouvelles projections a et a'_1 . Comme le plan est de bout, le point a'_1 est sur la trace frontale qui est $\beta a'_1$ ou R'_1 .

● REMARQUE. — Le plan horizontal n'ayant pas changé, l'angle du plan donné avec le plan horizontal de projection est conservé; or cet angle est en évidence lorsque le plan est rendu de bout.

C'est l'angle aigu de x_1y_1 et de R'_1 , soit $\theta = \widehat{y_1\beta a'_1}$.

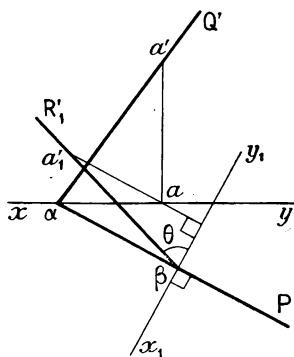


Fig. 166.

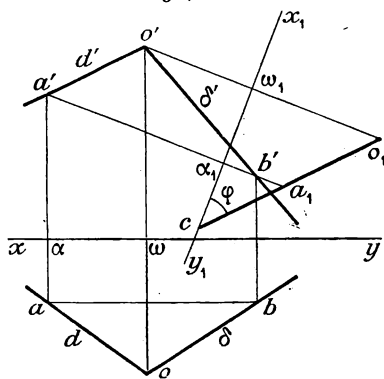


Fig. 167.

En raisonnant de la même façon, on verrait que :

→ Pour rendre un plan **vertical**, on fait un changement de plan horizontal tel que la nouvelle ligne de terre soit perpendiculaire à la projection frontale des frontales du plan.

Sur l'épure 167, le plan est défini par deux droites (D) et (Δ) concourantes en O. La nouvelle ligne de terre, x_1y_1 est perpendiculaire à la projection frontale ($a'b'$) d'une frontale du plan. En faisant le changement de plan pour les points (a, a') et (o, o') on trouve que la trace horizontale du plan, rendu vertical, est o_1a_1 .

L'angle du plan donné et du plan frontal de projection est l'angle :

$$\varphi = \widehat{o_1c x_1}.$$

■ 73. **Problème IV.** — *Peut-on, par changement de plan, rendre un plan donné parallèle à un plan de projection?* — Cela revient à rendre la normale au plan donné (P) perpendiculaire à un plan de projection; deux changements de plans sont donc nécessaires dans le cas général.

Si l'on veut rendre horizontal un plan donné on fera :

- 1° un changement de plan frontal pour rendre le plan de bout;
- 2° un changement de plan horizontal pour passer de la position de bout à la position horizontale.

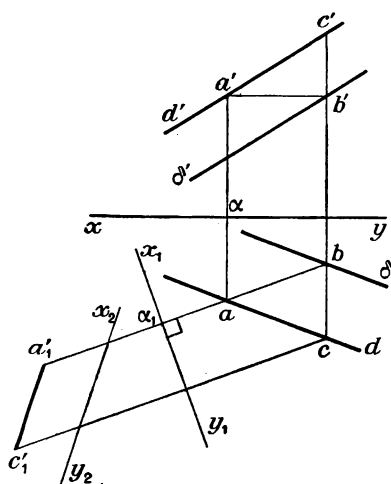


Fig. 168.

par la ligne de terre x_2y_2 parallèle à $a'_1c'_1$.

De même, si l'on veut rendre de front un plan donné, on fera :

- 1° un changement de plan horizontal pour rendre le plan vertical;
- 2° un changement de plan frontal pour rendre frontal ce plan vertical.

L'ensemble de ces deux opérations est rarement utilisé. Seul le passage d'un plan de bout à un plan horizontal (ou d'un plan vertical à un plan frontal) qui n'exige qu'un seul changement de plan est exécuté en pratique.

EXEMPLE. — *Rendre horizontal le plan défini par les deux droites parallèles (D) et (Δ) (fig. 168).*

1° Nous construisons une horizontale ($ab, a'b'$) du plan. Nous prenons une nouvelle ligne de terre x_1y_1 perpendiculaire à ab et nous faisons le changement de plan frontal correspondant.

L'horizontale AB devient de bout : sa nouvelle projection frontale est le point a'_1 obtenu en portant $\alpha_1 a'_1 = \alpha a'$.

Un autre point (c, c') de (D) a pour nouvelles projections c et c'_1 .

Le plan donné est alors rendu de bout et sa nouvelle trace frontale est $a'_1c'_1$.

2° On rendra ensuite le plan horizontal en faisant un changement de plan horizontal caractérisé

EXEMPLE. — On donne les projections d'un quadrilatère ABCD situé dans un plan vertical. Déterminer la grandeur de ce quadrilatère (fig. 169).

On fera un changement de plan frontal qui rend frontal le plan du quadrilatère. En prenant pour nouvelle ligne de terre x_1y_1 la trace horizontale $abcd$ du plan du quadrilatère, on obtient les nouvelles projections frontales $a'_1b'_1c'_1d'_1$ des sommets. Le quadrilatère est obtenu alors en vraie grandeur sur la nouvelle projection frontale. La construction est encore applicable si le plan vertical donné est de profil (fig. 170).

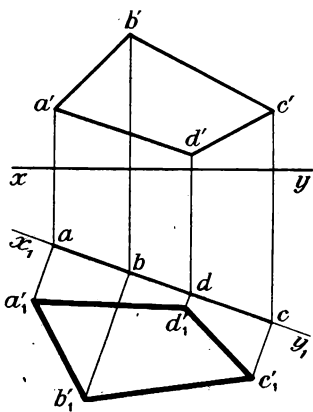


Fig. 169. — Vraie grandeur d'un quadrilatère vertical.

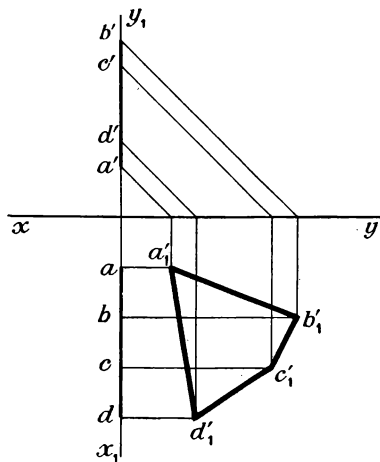


Fig. 170. — Vraie grandeur d'un quadrilatère de profil.

RÉSUMÉ

Par un seul changement de plan :		
on peut rendre	horizontal	frontal
	<i>horizontale</i> une droite quelconque <i>vertical</i> un plan quelconque <i>verticale</i> une droite frontale <i>horizontal</i> un plan de bout	<i>frontale</i> une droite quelconque <i>de bout</i> un plan quelconque <i>de bout</i> une droite horizontale <i>de front</i> un plan vertical

EXERCICES

129. — Par un changement de plan convenable, rendre une droite donnée de profil.

130. — Par un changement de plan, déterminer le point commun à deux droites de profil situées dans le même plan de profil.

131. — On donne les projections de trois points quelconques A, B, C dans un plan de profil. Rendre ce plan frontal. Propriétés de la figure $a'_1b'_1c'_1$ obtenue.

132. — 1° Rendre horizontal un plan de bout.

2° Dans le plan de bout on a placé deux points A et B. Trouver les projections des points C et D du plan de bout tels que ABCD soit un carré.

133. — Par un changement de plan convenable, rendre de bout un plan donné parallèle à la ligne de terre (on définira ce plan par deux droites parallèles à la ligne de terre).

134. — On donne la projection horizontale d'un angle droit (cette projection n'est pas un angle droit) et la projection frontale d'un de ses côtés. Trouver la projection frontale de l'autre côté à l'aide d'un changement de plan frontal.

135. — On donne un plan par ses traces. Faire un changement de plan convenable de façon que, dans le nouveau système, le plan devienne parallèle à la nouvelle ligne de terre.

136. — 1° On donne deux droites non situées dans un même plan. Effectuer un changement de plan frontal de façon que les nouvelles projections frontales des deux droites soient parallèles. (Montrer que cela revient à rendre de bout un plan parallèle aux deux droites.)

2° On donne les projections d'un quadrilatère gauche. Faire un changement de plan horizontal de manière que sa nouvelle projection horizontale soit un trapèze.

137. — 1° On donne un plan $P\alpha Q'$ par ses traces. Construire les nouvelles traces du plan dans un changement de plan frontal tel que la nouvelle ligne de terre x_1y_1 coupe l'ancienne en a .

2° Déterminer la ligne de terre x_1y_1 de façon que les nouvelles traces du plan soient confondues.

138. — On considère deux plans rectangulaires (P) et (Q) quelconques. Montrer que, par trois changements de plans successifs, on peut passer du système initial des plans (H) et (F) au système des plans (P) et (Q). (On introduira utilement le plan vertical (V) perpendiculaire à (P).)

2

ROTATION

■ **74. Rappel de propriétés.** — La transformation ponctuelle appelée *rotation autour d'un axe* a été définie dans le cours de Géométrie¹. Les propriétés suivantes ont été établies :

1° Les projections des points homologues sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation se correspondent dans une rotation plane ayant pour centre le pied de l'axe sur le plan et pour angle l'angle de la rotation de l'espace.

2° Le transformé d'un vecteur est un vecteur, les origines et les extrémités se correspondent respectivement.

3° La transformée d'une droite est une droite.

4° Le transformé d'un plan est un plan.

5° La rotation est un déplacement.

■ **75. Rotation d'un point autour d'un axe vertical ou de bout.**

— L'épure 171 montre le point (a, a') et l'axe vertical (Δ) de pied o . On veut faire tourner ce point de l'angle θ donné autour de l'axe. Nous faisons tourner le point a de l'angle θ autour de o . Nous obtenons le point a_1 que l'on rappelle en a'_1 de même cote que a' . La nouvelle position du point A (a, a') est $A_1 (a_1, a'_1)$.

L'axe de rotation est orienté de façon que l'on puisse définir sans ambiguïté le transformé a_1 de a .

→ Dans une rotation autour d'un axe vertical :

la projection horizontale du point tourne autour de la projection horizontale de la verticale ;

la projection frontale du point conserve sa cote.

L'épure 172 montre la rotation du point B (b, b') de l'angle β autour d'un axe de bout (Δ) de pied ω' .

■ **76. Rotation d'une droite autour d'un axe vertical ou de bout.** — La transformée d'une droite s'obtient en cherchant les transformés de deux points de la droite. On choisira des points qui simplifient les constructions.

1. MAILLARD-MILLET, *Géométrie*, cl. de Mathématiques, p. 117.

Soit à faire tourner de l'angle θ la droite D (d, d') autour de la verticale ($oz, o'z'$).

On sait (n° 74, 1°) que, si D_1 (d_1, d'_1) est la transformée, les projections horizontales (d) et (d_1) des deux droites se correspondent dans la rotation de centre o et d'angle θ . Ces projections sont donc tangentes à un même cercle de centre o (fig. 173).

Les points de contact a et a_1 sont les projections de deux points homologues A (a, a') et A_1 (a_1, a'_1). Marquons le point H (h, h') tel que h soit en o et h' sur $a'a'_1$. La droite HA est une horizontale. L'angle $\widehat{had}$ étant droit et, ayant un côté ah dans le plan de projection, il est la projection d'un angle droit de l'espace $\widehat{HAD}$. Donc AH est la perpendiculaire commune à l'axe et à (D) . Après rotation, elle devient la perpendiculaire commune à l'axe et à (D_1) . Les longueurs des segments AH et A_1H sont égales et représentent les plus courtes distances de (D) et de l'axe d'une part, de (D_1) et de l'axe d'autre part.

En définitive, pour obtenir les projections (d_1) et (d'_1) de la droite transformée, nous ferons tourner les deux points suivants :

1° le point A (a, a'), pied sur (D) de la perpendiculaire commune à la droite (D) et à l'axe;

2° un autre point B (b, b'), quelconque.

Pour construire le transformé B_1 (b_1, b'_1) du point B , on remarque que les vecteurs $\overrightarrow{ab}$ et $\overrightarrow{a_1b_1}$ se correspondent dans la rotation plane de centre o et d'angle θ . On a :

$$a_1b_1 = ab \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ao}) = (\overrightarrow{a_1b_1}, \overrightarrow{a_1o}).$$

La pratique du graphique est donc la suivante :

→ On abaisse la perpendiculaire oa de o sur (d) ; on fait tourner a de l'angle θ jusqu'en a_1 . La projection horizontale (d_1) est perpendiculaire en a_1 à oa_1 .

On marque un point (b, b') quelconque de (D) et on prend sur (d_1) le point b_1 tel que $a_1b_1 = ab$ et de façon que les angles droits $(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ao})$ et $(\overrightarrow{a_1b_1}, \overrightarrow{a_1o})$ soient de même sens. Ce point b_1 est le transformé de b ; on le rappelle en b'_1 de même cote que b' .

Si le point a n'est pas dans les limites du dessin, on fera tourner deux points de la droite.

Tout ce qui précède peut s'appliquer à la rotation autour d'un axe de bout (fig. 174).

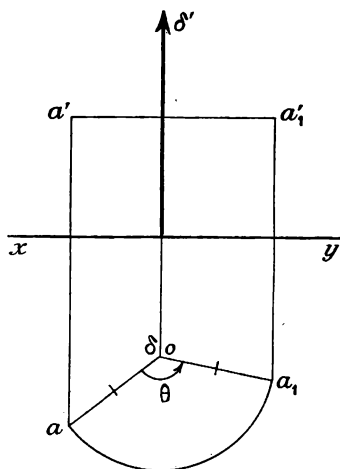


Fig. 171. — Rotation d'un point autour d'un axe vertical.

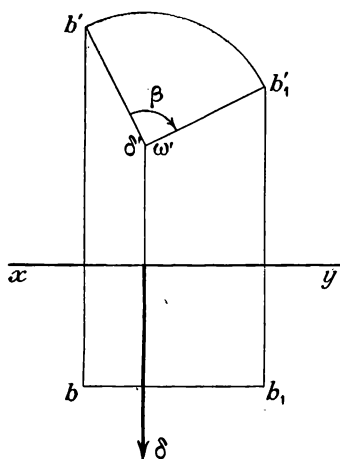


Fig. 172. — Rotation d'un point autour d'un axe de bout.

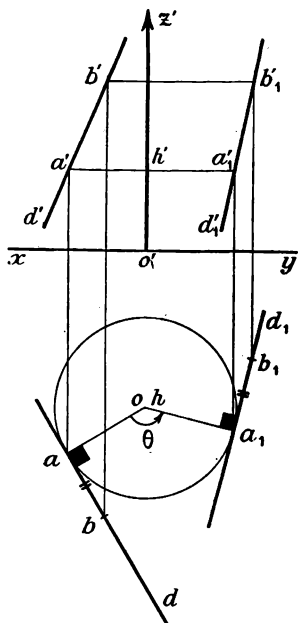


Fig. 173. — Rotation d'une droite autour d'un axe vertical.

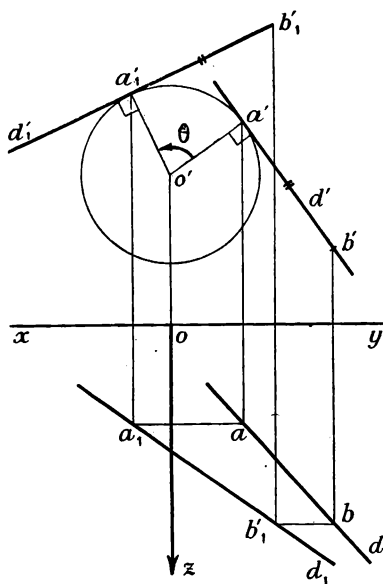


Fig. 174. — Rotation d'une droite autour d'un axe de bout.

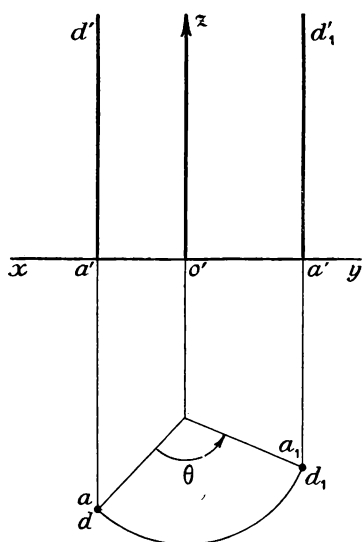


Fig. 175. — Rotation d'une verticale autour d'un axe vertical.

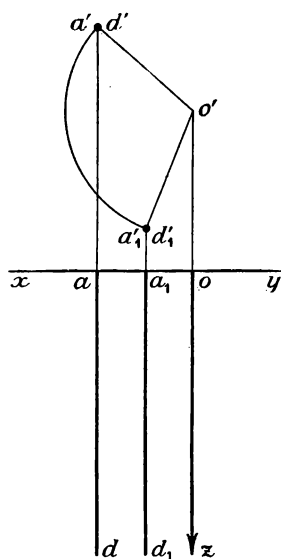


Fig. 176. — Rotation d'une droite de bout autour d'un axe de bout.

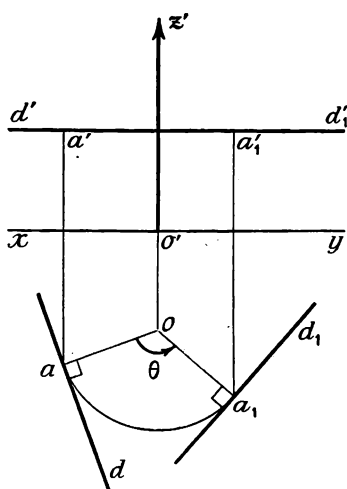


Fig. 177. — Rotation d'une horizontale autour d'un axe vertical.

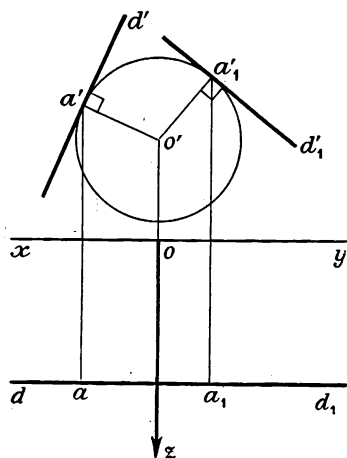


Fig. 178. — Rotation d'une frontale autour d'un axe de bout.

● CAS PARTICULIERS. — 1^o *Droite parallèle à l'axe.* La transformée est une droite parallèle à la première. Il suffit donc de faire tourner un point (fig. 175 et 176).

2^o *Droite perpendiculaire à l'axe.* Tous les points de la droite restent dans le plan (P), perpendiculaire à l'axe, mené par la droite. Le problème se ramène à une rotation plane (fig. 177 et 178). Il en est de même de toute figure plane située dans un plan normal à l'axe.

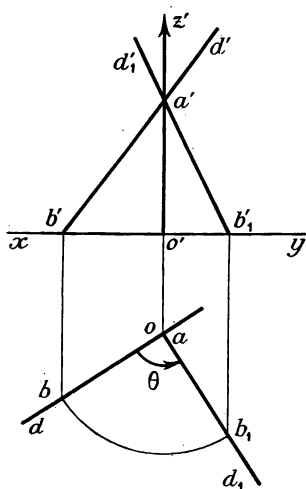


Fig. 179. — Rotation autour d'un axe vertical d'une droite rencontrant l'axe.

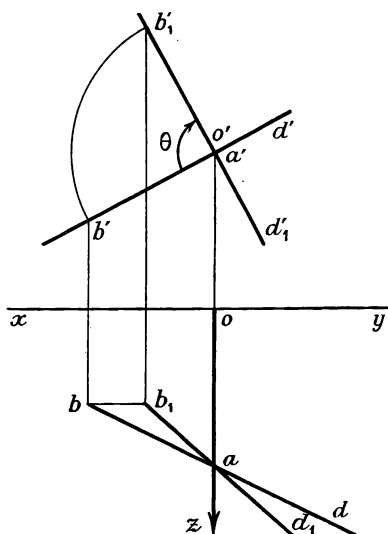


Fig. 180. — Rotation autour d'un axe de bout d'une droite rencontrant l'axe.

3^o *Droite rencontrant l'axe en un point A.* Ce point est invariant dans la rotation. Il suffit de faire tourner un autre point B (fig. 179 et 180).

■ 77. *Rotation d'un plan autour d'un axe vertical ou de bout.* — Pour obtenir le transformé d'un plan, la méthode générale consiste à chercher les transformés de trois points du plan ou encore à chercher les transformés d'un point et d'une droite du plan. On choisira des points ou des droites qui simplifient les constructions.

EXEMPLES. — I. *Faire tourner, autour d'un axe vertical, le plan (P) défini par deux droites (D) et (Δ) concourantes (fig. 181).*

L'axe rencontre le plan (P) en un point (A) qui est invariant dans la rotation. Nous avons intérêt à déterminer ce point. Sur la figure 181, nous avons coupé le plan (P) par le plan de front (F) passant par l'axe.

Ensuite, nous avons à faire tourner une droite du plan. En la choisissant horizontale les tracés sont simples. Sur la figure 181 nous avons pris l'horizontale (h, h') qui, après rotation, devient l'horizontale (h_1, h'_1).

Le transformé du plan est donc le plan défini par le point A (a, a') et l'horizontale (h_1, h'_1).

Si le point A de rencontre de l'axe et du plan est en dehors des limites de l'épure, on peut faire tourner deux horizontales du plan.

II. *Faire tourner un plan défini par ses traces autour d'un axe de bout.*

Sur la figure 182, le plan est défini par ses traces $P\alpha Q'$. On a cherché le point de rencontre A (a, a') de l'axe de bout (δ, δ') et du plan et on a fait tourner la trace frontale (Q') de l'angle θ . Elle est venue en (Q'_1). Le plan transformé est défini par sa trace frontale Q'_1 et par le point A (a, a').

On a construit sa trace horizontale βR parallèle à l'horizontale ($ac, a'c'$) du point A.

● **CAS PARTICULIERS.** — 1° *Plan perpendiculaire à l'axe.*

Il est confondu avec son transformé.

2° *Plan parallèle à l'axe (ou contenant l'axe).*

Son transformé est aussi parallèle à l'axe (ou contient l'axe).

Par exemple, si l'axe est de bout (fig. 183), on fera tourner un plan de bout en faisant tourner sa trace frontale de l'angle donné θ .

■ **78. Problème I.** — *Rendre, par rotation, une droite parallèle à un plan de projection.*

Pour rendre une droite frontale, on peut la faire tourner autour d'un axe vertical.

Dans l'étude de la rotation d'une droite autour d'un axe vertical, nous avons démontré que la projection horizontale de la droite transformée reste tangente au cercle de centre o et de rayon oa (fig. 184).

Cette projection horizontale peut donc prendre toute direction arbitraire. En particulier, en faisant tourner a d'un angle tel qu'il vient en a_1 ou en a_2 , la droite (D) sera rendue de front.

Le problème admet donc deux solutions.

Si l'axe de rotation n'est pas imposé, il est commode de le choisir de façon qu'il rencontre la droite (D).

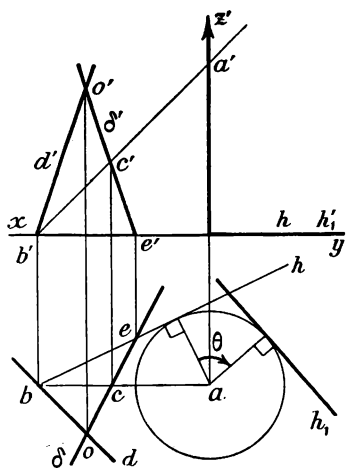


Fig. 181. — Rotation d'un plan autour d'un axe vertical.

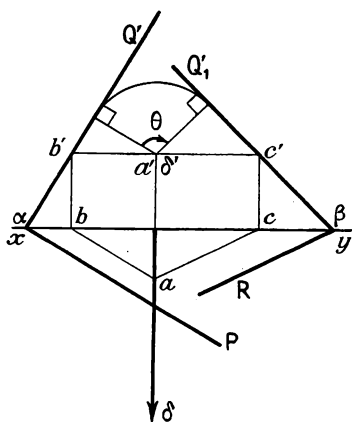


Fig. 182. — Rotation d'un plan autour d'un axe de bout.

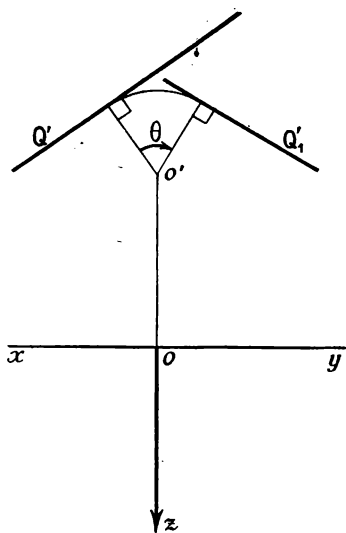


Fig. 183. — Rotation d'un plan de bout autour d'un axe de bout.

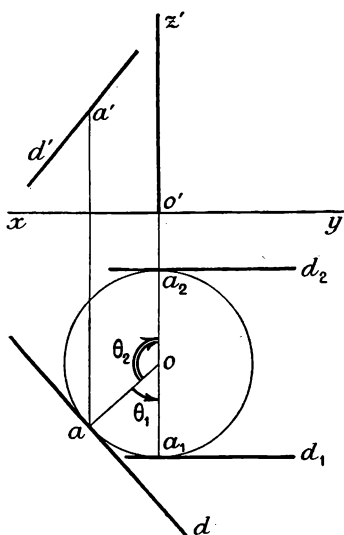


Fig. 184. — Rendre une droite frontale.

Sur l'épure 185 on a choisi l'axe vertical du point A (a, a'). On a rendu la droite frontale en amenant un autre point B (b, b') dans le plan de front de A. Le problème admet deux solutions, le point b pouvant venir en b_1 ou en b_2 .

● REMARQUE. — La droite étant rendue de front, la *distance des deux points* A et B est donnée, en vraie grandeur, en projection frontale par la longueur du segment $a'b'_1$.

En outre, en faisant tourner une droite autour d'une verticale on ne modifie pas l'*angle de la droite avec le plan horizontal de projection*. Cet angle est marqué sur la figure :

$$\alpha = \widehat{a'b'_1o'}.$$

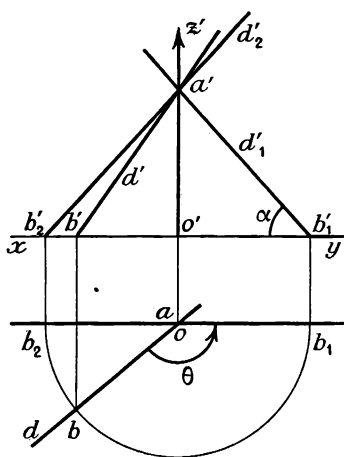


Fig. 185. — Rendre une droite frontale.

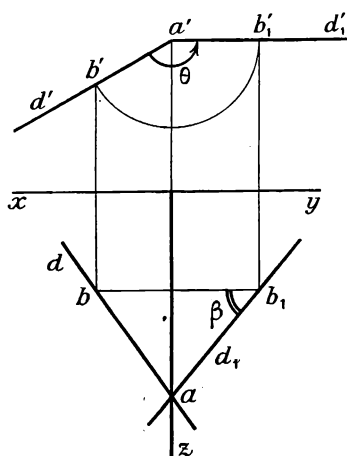


Fig. 186. — Rendre une droite horizontale.

De la même façon, pour **rendre une droite horizontale**, on peut la faire tourner autour d'un *axe de bout*.

La figure 186 montre la droite D (d, d') que l'on a fait tourner autour d'un axe de bout qui la rencontre en A (a, a'). On obtient la droite horizontale (d_1, d'_1) en joignant A (a, a') au point (b_1, b'_1) transformé de (b, b').

La longueur du segment ab_1 est la *distance des points* A et B.

L'*angle de la droite et du plan frontal de projection* est l'angle :

$$\beta = \widehat{bb_1a}.$$

■ **79. Problème II.** — *Rendre, par rotation, une droite perpendiculaire à un plan de projection.*

On vient de voir que si une droite (D) tourne autour d'un axe vertical, elle peut être rendue frontale. Il restera ensuite à passer de cette position frontale à la position verticale. On y parviendra par une rotation autour d'un axe de bout.

La figure 187 montre l'exécution des tracés.

On a fait tourner la droite D (d, d') autour d'un axe vertical la rencontrant en A (a, a').

On a fait ensuite tourner la frontale (d_1, d'_1) autour d'un axe de bout quelconque (z, z').

On a obtenu finalement la verticale (d_2, d'_2).

De la même façon, pour rendre, par rotation, une droite de bout, on la rendra :

1° horizontale par une rotation autour d'un axe de bout,

2° puis de bout par une rotation autour d'un axe vertical.

■ **80. Problème III.** — *Rendre, par rotation, un plan donné, perpendiculaire à un plan de projection.*

Si l'on veut rendre *de bout* un plan donné, il suffit de rendre sa normale frontale. On doit donc faire une rotation autour d'un axe vertical (fig 185).

→ Pour rendre un plan **de bout**, on fait une rotation autour d'un axe vertical.

De même si l'on veut rendre vertical un plan donné, il suffit de rendre sa normale horizontale. On doit donc faire une rotation autour d'un axe de bout (fig. 186).

→ Pour rendre un plan **vertical**, on fait une rotation autour d'un axe de bout.

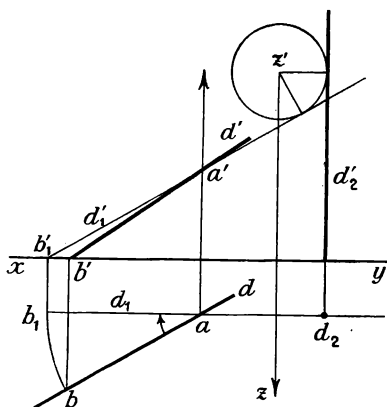


Fig. 187. — Rendre une droite verticale.

EXEMPLES. — I. *Rendre de bout un plan donné.* Nous supposons (fig. 188) le plan $P\alpha Q'$ défini par ses traces. L'axe de rotation est la verticale qui coupe le plan en (o, o') . Ce point reste fixe. Il suffit de faire tourner la trace horizontale αP autour de o pour l'amener à être perpendiculaire à xy . On obtient ainsi la droite βP_1 ; la trace frontale du plan rendu de bout est $\beta o'$.

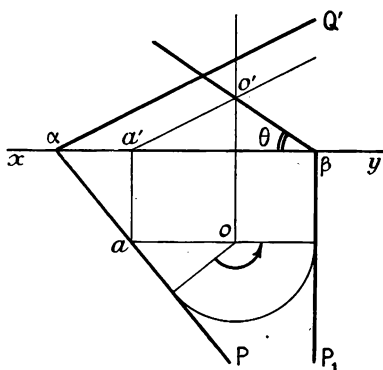


Fig. 188. — Rendre un plan de bout.

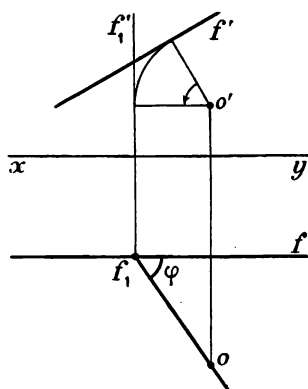


Fig. 189. — Rendre un plan vertical.

II. *Rendre vertical un plan donné.* Nous supposons (fig. 189) le plan défini par la frontale (f, f') et le point (o, o') . L'axe de rotation est la droite de bout du point (o, o') . On a fait tourner la frontale qui est devenue la verticale (f_1, f'_1) . Le plan est alors vertical ; sa trace horizontale est of_1 .

● **REMARQUE.** — Lorsqu'un plan tourne autour d'un axe vertical, l'angle qu'il fait avec le plan horizontal ne change pas. Cet angle est en évidence lorsque le plan est de bout.

Sur la figure 188, l'angle du plan et du plan horizontal est donc :

$$\theta = \widehat{o'\beta x}.$$

De même, lorsqu'un plan tourne autour d'un axe de bout, l'angle qu'il fait avec le plan frontal ne change pas. Cet angle est en évidence lorsque le plan est vertical.

Sur la figure 189, l'angle du plan et du plan frontal est donc :

$$\varphi = \widehat{o'_1 f_1 f}.$$

■ 81. Problème IV. — *Rendre, par rotation, un plan donné parallèle à un plan de projection.*

Pour qu'un plan soit *horizontal*, il faut et il suffit que sa normale soit verticale. Le problème exige donc deux rotations :

1° rendre le plan de bout par une rotation autour d'un axe vertical;

2° rendre ensuite horizontal le plan de bout.

De même, pour rendre un plan *frontal* il faudrait :

1° rendre le plan vertical par une rotation autour d'un axe de bout;

2° rendre ensuite frontal le plan vertical.

L'ensemble de ces deux opérations est rarement utilisé. Seul le passage d'un plan de bout à un plan horizontal (et d'un plan vertical à un plan frontal) est exécuté en pratique.

EXEMPLES. — I. On donne, par ses projections, un triangle vertical ABC. Déterminer la vraie grandeur du triangle (fig. 190).

Une rotation autour de la verticale de A permet de rendre le triangle frontal dans la position AB_1C_1 . On a ainsi la vraie grandeur du triangle en projection frontale $a'b'_1c'_1$.

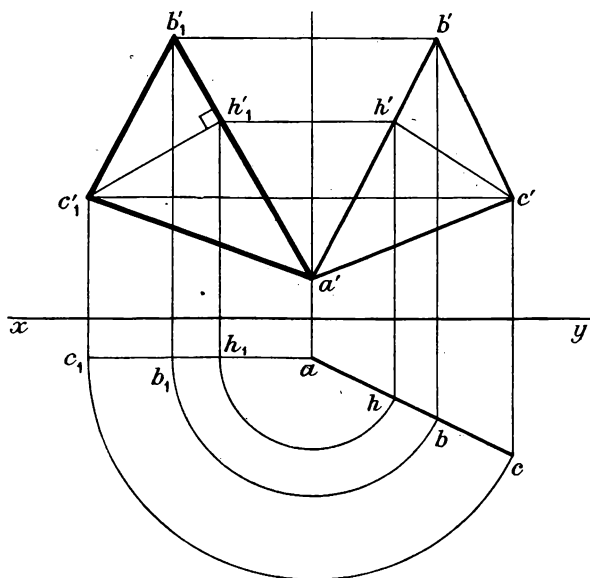


Fig. 190.

On a construit la hauteur $c'h'_1$ dans la position frontale.

La rotation inverse a permis de construire les projections $(ch, c'h')$ de cette hauteur. On notera que $c'h'$ n'est pas perpendiculaire à $a'b'$.

II, Construire, dans un plan de bout, un carré dont on donne une diagonale (ab , $a'b'$).

Une rotation autour de la droite de bout de A permet de rendre horizontal le plan de bout $a'b'$ (fig. 191). Le point A ne bouge pas, le point B vient en B_1 (b_1 , b'_1). On peut alors construire le carré $ac_1b_1d_1$. La rotation inverse donne les projections (c , c'), (d , d') des deux sommets inconnus. Les centres O et O_1 se correspondent.

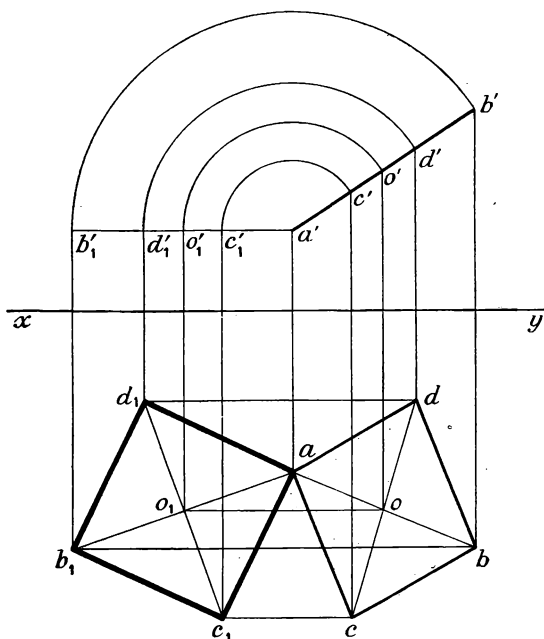


Fig. 191. — Construction d'un carré dans un plan de bout.

■ 82. Résumé. — Il est très important de savoir rendre une droite *frontale* ou *horizontale* et de savoir rendre un plan *vertical* ou *de bout*.

Nous avons vu que l'on peut y arriver soit par un changement de plan, soit par une rotation.

Ces opérations permettent d'obtenir la distance de deux points et les angles d'une droite ou d'un plan avec les plans de projection. Nous verrons d'autres avantages plus loin.

Nous résumons les résultats obtenus dans le tableau suivant.

RÉSUMÉ

Pour rendre :	on peut faire :	on obtient alors :
une droite } horizontale frontale	un changement de plan horizontal ou une rotation autour d'un axe de bout	la distance de deux points et l'angle de la droite et du plan frontal
	un changement de plan frontal ou une rotation autour d'un axe vertical	la distance de deux points et l'angle de la droite et du plan horizontal
un plan } de bout vertical	un changement de plan frontal ou une rotation autour d'un axe vertical	l'angle du plan et du plan horizontal
	un changement de plan horizontal ou une rotation autour d'un axe de bout	l'angle du plan et du plan frontal

■ 83. Comparaison des rotations et des changements de plan. — On voit, par le tableau précédent, qu'une rotation et qu'un changement de plan conduisent au même résultat avec des tracés différents. Un changement de plan horizontal est comparable à une rotation autour d'un axe de bout; un changement de plan frontal est comparable à une rotation autour d'un axe vertical. Il n'y a pas lieu, si l'on ne juge que le résultat, de préférer une méthode à l'autre.

Toutefois, dans un changement de plan, l'une des projections est conservée et il n'y a qu'une seule projection nouvelle à dessiner. Dans une rotation, les deux projections changent et deux projections nouvelles sont à dessiner. Pour cette raison, on préfère souvent un changement de plan à une rotation.

Par contre, la méthode des rotations s'impose lorsqu'il s'agit de figures de révolution autour d'un axe vertical (ou de bout), car la rotation autour de cet axe ne change pas la projection horizontale (ou frontale) et l'objection fondamentale ne tient plus. Il est courant, par exemple, d'utiliser la rotation dans l'étude de la sphère et, plus généralement, des surfaces de révolution.

■ 84. Rotation autour d'un axe parallèle à un plan de projection. — Jusqu'alors, nous n'avons étudié que le cas où l'axe de rotation est vertical ou de bout. Théoriquement, on peut toujours se ramener à ce cas par deux changements de plan ou deux rotations ou un changement de plan et une rotation. Nous étudierons seulement le cas où l'axe est parallèle à un plan de projection : un seul changement de plan suffira.

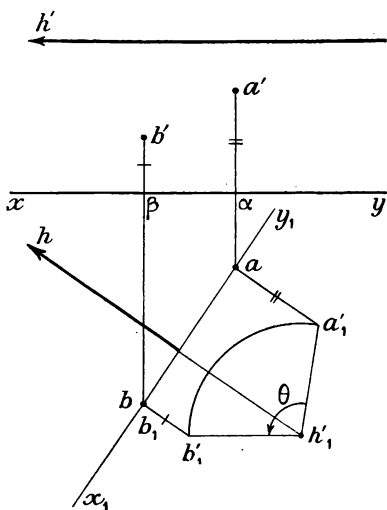


Fig. 192.

EXEMPLE. — Faire tourner, d'un angle donné θ , un point A (a, a') autour d'un axe horizontal (h, h') (fig. 192).

Un changement de plan frontal rend l'axe de bout. La nouvelle ligne de terre x_1y_1 a été obtenue en abaissant de a la perpendiculaire à (h). Les nouvelles projections de A sont a et a'_1 tel que $aa'_1 = \alpha a'$. Dans le nouveau système, on fait tourner le point A (a, a'_1) de l'angle θ ; il vient en (b_1, b'_1). Il suffit de faire le changement de plan inverse pour obtenir les projections du point B transformé de A. Ce sont b et b' : b est confondu avec b_1 et b' est obtenu par $\beta b' = bb'_1$.

EXERCICES

139. — Faire tourner un point donné, autour d'un axe vertical donné, de façon qu'il ait un éloignement donné.

140. — Faire tourner un point donné, autour d'un axe de bout donné, de façon qu'il soit à une distance donnée d'une verticale donnée.

141. — Faire tourner un plan donné, autour d'un axe vertical donné, en faisant tourner une ligne de pente.

142. — Par une rotation convenable, rendre une droite donnée de profil.

143. — Par une rotation, autour d'un axe vertical donné, rendre de bout un plan donné parallèle à la ligne de terre.

144. — On donne deux droites non situées dans un même plan. Faire une rotation autour d'un axe vertical de façon que les nouvelles projections frontales des deux droites soient parallèles.

145. — 1° Résoudre le problème suivant de géométrie : Par rotation autour d'un axe (Δ), amener un plan donné (P) à être perpendiculaire à un plan (Q).

2° On donne un plan $P\alpha Q'$ par ses traces; faire tourner ce plan autour d'un axe vertical de façon qu'après rotation les traces du plan soient confondues.

3

RABATTEMENT

■ 85. Définitions • **Rabattre** un plan sur un plan horizontal, c'est le faire tourner autour de son intersection avec ce plan horizontal pour l'amener en coïncidence avec lui.

- L'horizontale qui sert d'axe de rotation est dite la **charnière** du rabattement.

Le sens de la rotation n'est pas indiqué et il y en a deux qui conviennent. Nous préciserons ultérieurement.

On peut aussi rabattre un plan sur un plan de front en le faisant tourner autour d'une frontale. Les constructions sont analogues dans les deux cas.

■ **86. Rabattement d'un point du plan.** — 1^o Soit un plan défini par une horizontale (h, h') de cote nulle et un point A (a, a'). Nous nous proposons de rabattre ce plan sur le plan horizontal de projection. La charnière est donc l'horizontale (h, h'). Le rabattement étant une rotation, nous ferons d'abord un changement de plan frontal qui amènera la charnière à être de bout.

La nouvelle ligne de terre x_1y_1 est la perpendiculaire menée de a à (h) (fig. 193). Les nouvelles projections de A sont a et a'_1 telles que $aa'_1 = \alpha a'$. La rotation autour de l'axe de bout doit transformer a'_1 en un point de la ligne de terre x_1y_1 . Nous trouvons les deux solutions annoncées. Choisissons l'une d'elles arbitrairement, soit (a_2, a'_2) . Le problème est résolu, le rabattement du point est le point a_2 .

Pour éviter les indices, dans la suite, nous désignerons le point rabattu par la lettre majuscule correspondante, ici A.

Enfin, nous dirons que A est *le rabattement du point*, au lieu de dire, ce qui serait le seul langage correct, que a_2 est la projection horizontale du rabattement.

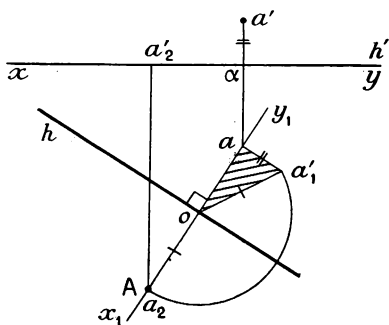


Fig. 193. — Rabattement d'un point sur un plan horizontal.

Règle du triangle rectangle.

2° Si la charnière n'est pas dans le plan horizontal de projection, nous pouvons imaginer que l'on a d'abord amené, par translation,

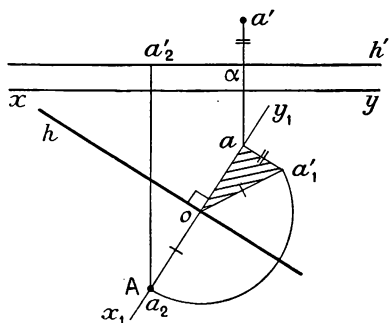


Fig. 193 bis. — Rabattement d'un point sur un plan horizontal.

Règle du triangle rectangle.

perpendiculaire à (h) , que $oA = oa_1$ et que oa_1 est l'hypoténuse du triangle oaa_1 , rectangle en a , dont les côtés sont oa et $aa_1 = \alpha a' =$ différence des cotes de a' et de (h') .

Nous énoncerons :

Règle du triangle rectangle. — La projection horizontale du rabattement d'un point (a, a') d'un plan se trouve sur la perpendiculaire menée de la projection horizontale a du point à la projection horizontale (h) de la charnière et à une distance de (h) égale à l'hypoténuse d'un triangle rectangle. Un côté de l'angle droit de ce triangle est la distance de a à (h) , l'autre côté est égal à la valeur absolue de la différence des cotes du point et de la charnière.

● REMARQUE. — Cette règle n'est pas la seule qui permette d'obtenir le rabattement du point. Voici un autre procédé qui donne des tracés plus simples lorsqu'on peut l'utiliser. Traçons, dans le plan, la frontale $(af, a'f')$ du point (a, a') . Dans le rabattement le point (f, f') , situé sur la charnière, ne bouge pas. En outre la distance des points (a, a') et (f, f') est donnée, en vraie grandeur, par la longueur du segment $a'f'$.

Le rabattement du point (a, a') se trouve donc (fig. 194) :

1° sur la perpendiculaire menée de a à la projection horizontale (h) de la charnière;

2° sur le cercle de centre f et de rayon $f'a'$.

2° *Procédé des alignements.* — Ayant rabattu un point (a, a') en A, nous considérons le point du plan projeté horizontalement en b (on en déduit facilement sa projection frontale b'). La droite ab coupe la projection horizontale de la charnière en un point i . Ce point i est la projection horizontale d'un point du plan qui ne bouge pas dans le rabattement. Le point (b, b') se rabat donc sur la droite iA et sur la perpendiculaire menée de b à (h) (fig. 196).

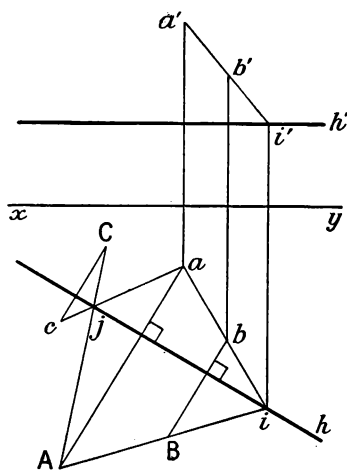


Fig. 196. — Rabattement d'une figure plane.
Procédé des alignements.

des points dont les projections horizontales sont de part et d'autre de (h) . La figure 196 en montre un exemple avec le point rabattu en C.

3° *Procédé du triangle de rabattement.* — Lorsqu'on a pris pour nouvelle ligne de terre x_1y_1 (fig. 193), le plan à rabattre est devenu de bout. L'angle aigu $\widehat{aoa'_1}$ du triangle rectangle aoa'_1 est donc l'angle du plan et du plan horizontal de projection. Par suite, quand on change de point, ce triangle reste semblable à lui-même. On l'appelle *triangle de rabattement*.

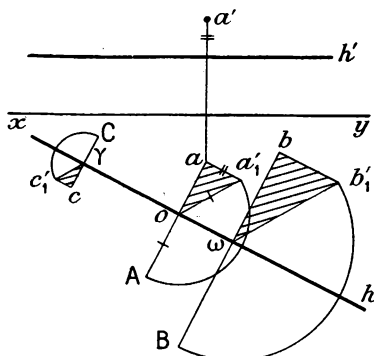


Fig. 197. — Rabattement d'une figure plane.
Triangles de rabattement.

Pour construire le rabattement B d'un point du plan projeté horizontalement en b , on construit le triangle de rabattement $b\omega b'_1$ de ce point : les côtés homologues ao et $b\omega$, bb'_1 et aa'_1 , oa'_1 et $\omega b'_1$ sont parallèles. On en déduit le rabattement

B en portant $\omega B = \omega b'_1$ sur la droite $b\omega$ et en notant que les points projetés horizontalement d'un même côté de (h) se rabattent également d'un même côté.

La figure 197 montre les deux cas possibles.

Indiquons que l'on n'utilise jamais plus d'une fois, au cours du rabattement d'une figure plane, la règle du triangle rectangle. Le procédé de la frontale et le procédé des alignements donnent les rabattements des divers points avec plus de précision.

■ **88. Problème inverse.** — Un point du plan étant rabattu en A, il s'agit de déterminer sa projection frontale a' connaissant sa projection horizontale a . Les données du problème sont :

les projections (h) et (h') de la charnière, la projection horizontale a et le rabattement A.

Définition. *Relever un point, c'est trouver la projection frontale d'un point du plan dont on donne la projection horizontale et le rabattement. Cette opération s'appelle relèvement.*

Il suffit d'examiner les procédés du rabattement pour en déduire facilement la règle du relèvement d'un point :

On mène la perpendiculaire Ao sur (h) et on trace le cercle de centre o et de rayon oA . Ce cercle coupe la parallèle à (h) menée par a en a'_1 . La différence des cotes du point et de la charnière est aa'_1 (fig. 198).

Le problème n'est possible que si $Ao \geq oa$.

Connaissant la différence des cotes du point et de la charnière, on mène la ligne de rappel $a\alpha$ du point et on porte $\alpha a' = aa'_1$.

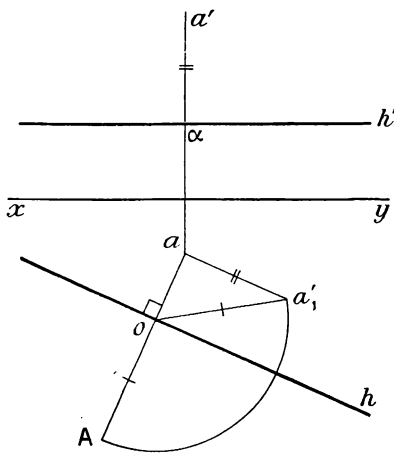


Fig. 198.

L'opération peut se faire de deux façons possibles. Le relèvement d'un point, comme le rabattement, admet deux solutions.

On en choisit une arbitrairement, selon les commodités du dessin. Nous allons voir qu'alors le relèvement des autres points du plan peut se faire sans ambiguïté.

■ 90. Correspondance entre la projection horizontale d'une figure plane et son rabattement. — Les constructions du rabattement ou du relèvement mettent en évidence la correspondance qui lie la projection horizontale d'une figure plane et son rabattement.

Appelons *points homologues* la projection horizontale a et le rabattement A , *droites homologues* la projection horizontale ab d'une droite du plan et son rabattement AB .

Nous énoncerons :

Théorème. — Deux points homologues sont situés sur une même perpendiculaire à la projection horizontale de la charnière.

Deux droites homologues se coupent sur la projection horizontale de la charnière, à moins qu'elles ne soient l'une et l'autre parallèles à la charnière.

Ces résultats sont très importants pour la pratique du rabattement. Ils montrent que la projection horizontale d'une figure plane et son rabattement ne peuvent pas être tracés d'une façon arbitraire. Si on se limite à un polygone plan, les projections horizontales des côtés du polygone et les rabattements de ces côtés doivent se couper sur la projection horizontale (h) de la charnière ou être parallèles à (h).

La figure 200 montre la projection horizontale $abcde$ d'un pentagone plan et son rabattement $ABCDE$, la charnière étant l'horizontale de son plan projetée horizontalement en (h).

AB et ab se coupent en p sur (h), Aa et Bb sont perpendiculaires à (h);

BC et bc se coupent en n sur (h), Cc est perpendiculaire à (h);

DC et dc se coupent en m sur (h), Dd est perpendiculaire à (h);

DE et de sont parallèles à (h); Ee est perpendiculaire à (h);

AE et ae se coupent en q sur (h).

La vérification de l'alignement peut se faire sur tout couple de droites homologues; par exemple BD et bd doivent se couper sur (h).

(Se reporter à l'exercice n° 190 pour l'étude plus détaillée de la correspondance.)

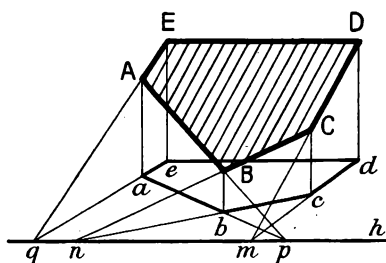


Fig. 200.

L'utilisation des droites parallèles donne aussi des tracés intéressants qui généralisent le procédé de la frontale.

Considérons (fig. 201) la charnière (h, h') et un point (a, a') que

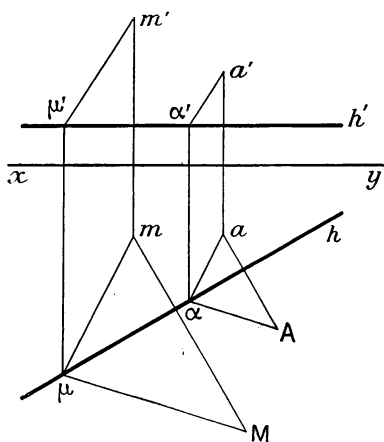


Fig. 201.

l'on a rabattu en A par un procédé quelconque. Prenons un point α quelconque sur (h), rappelé en α' sur (h'). La droite ($\alpha\alpha, \alpha'\alpha'$) se rabat en αA . Soit alors un point quelconque du plan projeté horizontalement en m . La droite, menée par ce point, parallèle à ($\alpha\alpha, \alpha'\alpha'$) a pour projection horizontale la parallèle $m\mu$ à $\alpha\alpha$ et se rabat donc suivant la parallèle μM à αA . Autrement dit, on construit le triangle $m\mu M$ dont les côtés sont parallèles aux côtés du triangle

$\alpha\alpha A$. Le problème de relèvement se résout de la même façon.

Cette méthode est désignée sous le nom de *méthode de la corde de l'arc*, parce que le segment mM est la projection de la corde de l'arc de cercle décrit par le point (m, m') en tournant autour de la charnière.

■ 91. **Utilité du rabattement.** — On exécute le rabattement d'une figure plane sur un plan horizontal pour tracer des constructions non projectives. On relève ensuite.

Naturellement, il est inutile de faire un rabattement si la construction à effectuer est projective. C'est ainsi que la construction du centre de gravité G d'un triangle ABC peut se faire sur chaque projection : les projections g et g' de G sont respectivement les centres de gravité des triangles abc et $a'b'c'$. En effet, le milieu d'un segment se projette au milieu de la projection de ce segment.

Nous verrons dans la division [4] de ce chapitre des applications du rabattement. Nous traiterons seulement ici deux exemples.

EXEMPLES. — I. *Trouver les projections du centre du cercle inscrit d'un triangle donné par ses projections.*

Soit (a, a'), (b, b'), (c, c') les projections des sommets (fig. 202). Nous rabattons le triangle en prenant pour charnière l'horizontale ($ah, a'h'$). Le rabattement du point (b, b') est obtenu par la règle du triangle rectangle :

$$bb'_1 = \beta b' \quad \text{et} \quad oB = ob'_1.$$

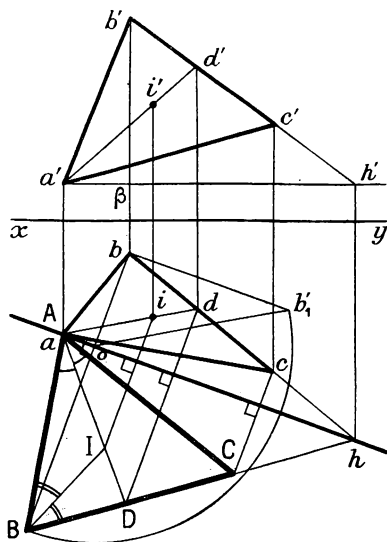


Fig. 202. — Rabattement d'un triangle.
Construction du centre
du cercle inscrit.

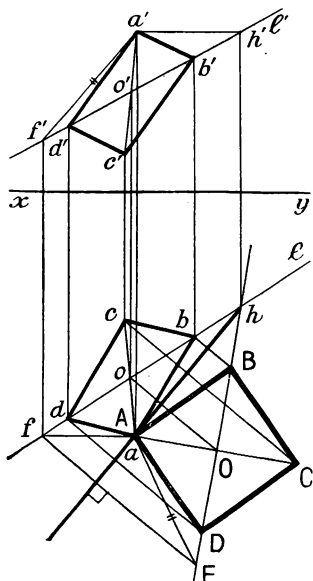


Fig. 203. — Construction d'un
carré, connaissant un sommet
et la droite portant une dia-
gonale.

Le rabattement C du troisième sommet est obtenu par le procédé des alignements. Le triangle rabattu est ABC . On construit alors le centre I du cercle inscrit. Il s'agit maintenant de le relever. La bissectrice AI coupe le côté BC en D . On obtient le relèvement de D en menant Dd perpendiculaire à (h) jusqu'en d sur bc . On le rappelle en d' sur $b'c'$. Le relèvement de I s'en déduit en menant Ii perpendiculaire à (h) .

Les projections du centre du cercle inscrit sont i et i' .

- II. Trouver les projections d'un carré, connaissant les projections d'un sommet et les projections de la droite portant la diagonale ne contenant pas ce sommet.

Soit le sommet (a, a') et la diagonale (l, l') . Nous rabattons (fig. 203) le plan du carré autour de l'horizontale $(ah, a'h')$. Pour cela nous avons rabattu la frontale $(af, a'f')$: $aF = a'f'$. La diagonale se rabat suivant la droite hF . On peut alors construire le rabattement $ABCD$ du carré. Il faut maintenant relever les sommets B, C, D . Par des perpendiculaires à la projection horizontale de la charnière, on obtient les projections horizontales b et d d'où l'on déduit les projections frontales b' et d' . On a ainsi deux côtés du carré; on construit le quatrième sommet (c, c') en utilisant le centre (o, o') du carré, milieu du segment $(bd, b'd')$.

La figure se prête à plusieurs vérifications. Par exemple, Cc doit être perpendiculaire à ah ; CB et cb doivent se couper sur ah .

■ 92. **Cas particuliers.** — 1° *Rabattement d'un plan vertical.* — Considérons un plan vertical (fig. 204) dont la trace horizontale est (h) . Soit (a, a') un point de ce plan. Si l'on rabat le plan vertical sur le plan horizontal de projection, la charnière est la trace horizontale du plan. Le rabattement est, ici, une rotation d'un angle droit autour de cette charnière. La projetante aa' se rabat suivant la perpendiculaire aA à ah et l'on a : $aA = aa'$.

Le triangle rectangle, envisagé dans le cas général du n° 86, n'existe plus; l'un des côtés de l'angle droit est nul puisque a est sur la projection horizontale de la charnière.

Ce rabattement revient à un changement de plan frontal en prenant pour nouvelle ligne de terre x_1y_1 la trace horizontale du plan vertical.

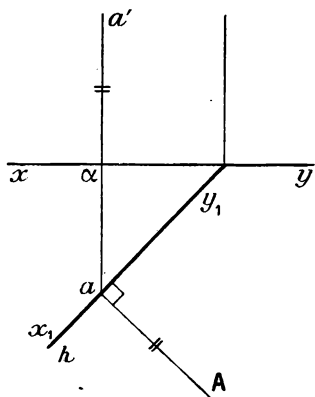


Fig. 204. — Rabattement d'un plan vertical.

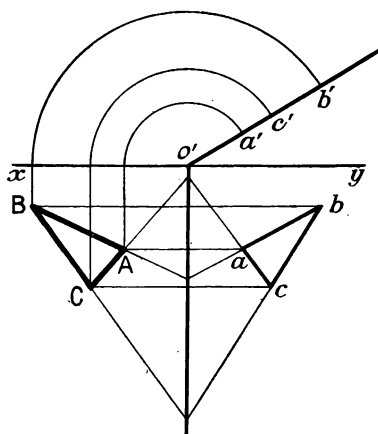


Fig. 205. — Rabattement d'un plan de bout.

2° *Rabattement d'un plan de bout.* — Considérons un plan de bout (fig. 205). Le rabattre sur le plan horizontal de projection, c'est le faire tourner autour de sa trace horizontale qui est une droite de bout. L'opération revient donc à une rotation autour d'un axe de bout. La figure 205 montre un triangle $(abc, a'b'c')$ dans un plan de bout et son rabattement ABC sur le plan horizontal de projection. On peut rabattre chaque point en faisant la rotation nécessaire. On peut aussi utiliser les alignements : ab et AB, bc et BC, ac et AC doivent se couper respectivement sur la charnière.

■ 93. Généralisations. — I. On peut envisager le *rabattement d'un plan sur un plan frontal*. La charnière sera une droite frontale. Les règles de rabattement et de relèvement, les remarques géométriques sont les mêmes que pour le rabattement sur un plan horizontal. Il suffit d'invertir les projections.

EXEMPLE. — Construire un carré, connaissant les projections de son centre et d'une droite portant un côté (fig. 206).

Soit le centre (o, o') et la droite (f, f') portant un côté. On pourrait rabattre le plan du carré sur un plan horizontal, mais ce serait maladroit puisque l'on a une droite frontale dans l'épure. Nous prendrons donc la droite (f, f') pour charnière. Le rabattement du centre a été obtenu par la règle du triangle rectangle :

$$o'o'_1 = \alpha o; \omega'o'_1 = \omega'O.$$

On peut alors construire le carré ABCD, connaissant son centre O et une droite portant un côté : $\omega'O = \omega'A = \omega'B$.

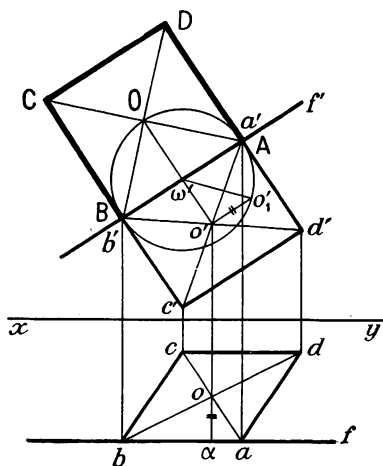


Fig. 206. — Construction d'un carré, connaissant : son centre et la droite qui porte un côté.

On en déduit les sommets (a, a') et (b, b') portés par (f, f') . Les autres sommets (c, c') , (d, d') en résultent par symétrie par rapport au centre (o, o') .

La projection frontale $a'b'c'd'$ est un rectangle, comme on pouvait le prévoir (angle droit dont un côté est parallèle au plan de projection).

II. Il peut arriver que l'on ait à étudier des points non situés dans un même plan. Il est commode, alors, de revenir au problème initial, c'est-à-dire à la rotation autour d'un axe horizontal.

EXEMPLE. — On rabat un plan (P) sur un plan horizontal. Trouver les nouvelles projections d'un point lié au plan (P) (fig. 207).

Soit un plan (P) défini par sa trace (h, h') sur le plan horizontal de projection et par un point (a, a'). Nous le rabattons sur le plan

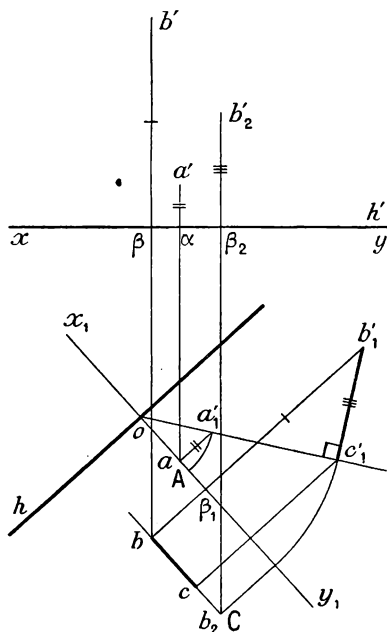


Fig. 207.

horizontal de projection. Considérons un point B (b, b') lié au plan. Faisons un changement de plan frontal en prenant pour nouvelle ligne de terre la perpendiculaire x_1oy_1 menée de a à (h). Le plan (P) devient de bout : sa nouvelle trace frontale est la droite joignant o à la projection nouvelle a'_1 du point (a, a') : $aa'_1 = \alpha a'$. Le rabattement de plan donne le point A : $oA = oa'_1$. Le même changement de plan appliqué au point B (b, b') donne les nouvelles projections : b et b'_1 telles que $\beta_1 b'_1 = \beta b'$ (dans le sens convenable). Abaissons du point (b, b'_1) la perpendiculaire au plan rendu de bout. Nous obtenons la frontale ($bc, b'_1c'_1$). Lorsqu'on rabat le plan sur le plan horizontal, le point (c, c'_1) se rabat en C. La perpendiculaire abaissée de (b, b') sur le plan est alors devenue verticale et la cote du point transformé est égale à la distance de (b, b') au plan. Cette distance est donnée, lorsque le plan est de bout,

par la longueur $b'_1c'_1$ du segment frontal. Le point B (b, b') vient donc en $B_2(b_2, b'_2)$ où b_2 est confondu avec C et $\beta_2 b'_2 = b'_1c'_1$.

EXERCICES

146. — Rabattre, sur le plan horizontal de projection, un plan défini par un point (a, a') et une droite de profil ($bc, b'_1c'_1$).

147. — On donne un triangle par les projections de ses sommets. Construire les projections de l'orthocentre et du centre du cercle circonscrit.

148. — On donne un triangle par les projections de ses sommets. Construire le point M du cercle circonscrit diamétralement opposé à l'un des sommets. Déterminer les projections de la droite de Simson de M (voir *Géométrie*, p. 58).

149. — 1° On donne un plan par ses traces et on le rabat sur le plan horizontal de projection. Construire le rabattement de la trace frontale.

2° On donne la trace horizontale αP du plan, construire la trace frontale sachant que, dans l'espace, les deux traces font un angle donné θ . Cas où l'angle θ est droit.

Inversement, soit à porter sur une droite donnée (ab , $a'b'$) à partir du point (a , a') une longueur donnée l .

On amène la droite à être parallèle à un plan de projection. Sur l'épure 209 on l'a amenée à être horizontale :

soit par changement de plan horizontal (209, I);

soit par rotation autour d'un axe de bout (209, II).

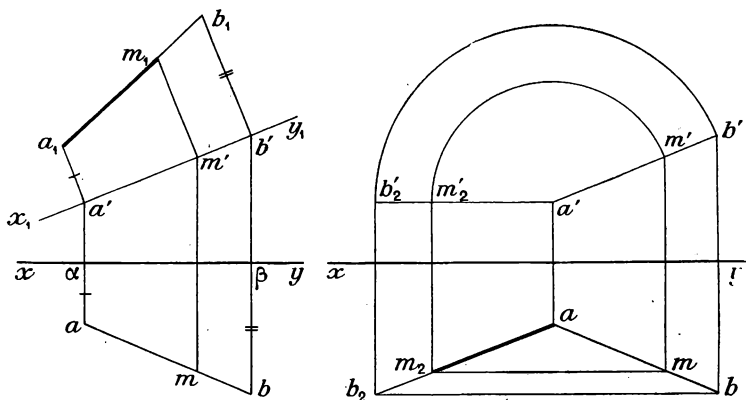


Fig. 209. — Porter une longueur $AM = l$ sur une droite,

I, par changement
de plan horizontal.

II, par rotation autour
d'un axe de bout.

On porte alors la longueur donnée soit en a_1m_1 (fig. 209, I), soit en am_2 (fig. 209, II). L'opération inverse conduit au point (m , m').

Il y a deux solutions au problème puisque l'on peut porter la longueur donnée dans un sens ou dans l'autre.

■ **95. Distance d'un point à une droite.** — La distance d'un point à une droite est obtenue directement en vraie grandeur dans deux cas :

1° La droite est *verticale* (ou *de bout*). La perpendiculaire menée par le point à la droite est alors horizontale (ou frontale) (fig. 143).

2° Le plan formé par le point et la droite est parallèle à un plan de projection. La figure se projette en vraie grandeur sur ce plan de projection.

Dans les autres cas, on peut se ramener au 2° par un rabattement.

→ Pour trouver la distance d'un point à une droite, on rabat le plan qu'ils déterminent.

EXEMPLE. — Trouver la distance du point A (a, a') à la droite D (d, d').

Nous traçons (fig. 210) l'horizontale ($ab, a'b'$) du plan ainsi défini et nous rabattons le plan autour de cette droite. Les points a et b sont sur la charnière. Nous rabattons c en C par la règle du triangle rectangle et nous obtenons, suivant bC , le rabattement de la droite. Nous menons aH perpendiculaire sur bC .

La distance cherchée est : aH .

Nous profitons du dessin pour déterminer la perpendiculaire abaissée de A sur la droite D. Il suffit de relever le point H, on obtient immédiatement ses projections (h, h') : Hh est perpendiculaire à la charnière ab et h' s'obtient par ligne de rappel. La perpendiculaire est ($ah, a'h'$).

Si la droite est quelconque, comme dans l'exemple précédent, on rabat généralement sur un plan horizontal. Si la droite est frontale, on pourra rabattre sur un plan de front. Le cas de la droite de profil a été étudié au n° 69, mais la méthode générale du rabattement est aussi applicable.

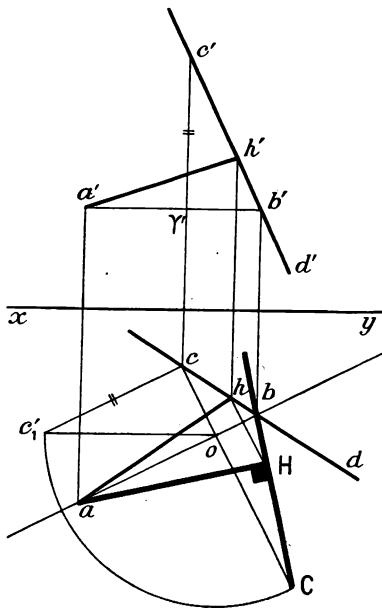


Fig. 210.
Distance d'un point à une droite.

■ 96. Distance d'un point à un plan. — Si le plan est *vertical* (ou *de bout*), la perpendiculaire menée du point au plan se construit immédiatement : elle est horizontale (ou frontale) et la distance s'obtient en vraie grandeur en projection horizontale (ou frontale).

Or un plan quelconque peut être rendu vertical (ou de bout) par un changement de plan ou une rotation.

→ Pour trouver la distance d'un point à un plan, on rend ce plan vertical ou de bout.

La perpendiculaire issue du point donné est alors horizontale ou frontale. Son pied et sa longueur se déterminent immédiatement. Rappelons que, pour rendre un plan de bout (n° 82), on peut faire un changement de plan frontal ou une rotation autour d'un axe vertical.

EXEMPLES. — I. *Trouver la distance du point A (a, a') à un plan de bout (Q') (fig. 211).*

La perpendiculaire est la frontale ($af, a'f'$) qui coupe le plan de bout en (b, b'). La distance du point au plan est la longueur du segment $a'b'$.

II. *Trouver la distance du point A (a, a') à un plan défini par deux droites concourantes ($od, o'd'$) et ($o\delta, o'\delta'$) (fig. 212).*

Dessignons l'horizontale (h, h') du plan et rendons le plan de bout en changeant le plan frontal de projection. La nouvelle ligne de terre x_1y_1 est perpendiculaire à h .

Nous faisons le changement de plan :

pour le point (o, o') qui vient en (o, o'_1),

pour l'horizontale (h, h') qui devient de bout en (h, h'_1),

pour le point (a, a') qui vient en (a, a'_1).

La droite $h'_1o'_1$ est la trace frontale du plan rendu de bout. La perpendiculaire menée de A sur le plan est maintenant une frontale dont la projection frontale est la perpendiculaire menée de a'_1 sur $h'_1o'_1$. Son pied a pour projection frontale m'_1 et pour projection horizontale m .

La distance du point au plan est la longueur du segment $a'm'_1$. En faisant le changement de plan inverse, on trouve les projections m et m' du pied de la perpendiculaire ($\mu m' = \mu_1 m_1$).

La perpendiculaire est la droite ($am, a'm'$).

Inversement, on peut chercher à mener à un plan donné, par un point (m, m') de ce plan, une perpendiculaire de longueur donnée. Il suffit d'effectuer les tracés de la fig. 212 dans l'ordre inverse. Après avoir rendu le plan de bout, sa trace frontale est $h'_1o'_1$; on rappelle m en m'_1 sur cette trace et on mène à cette trace la perpendiculaire $m'_1a'_1$ égale à la longueur donnée. On en déduit la projection horizontale ma , puis la projection frontale $m'a'$ par le changement de plan inverse.

III. *Trouver la distance d'un point A (a, a') à un plan, parallèle à la ligne de terre et défini par ses traces P et Q' (fig. 213).*

On emploie le même procédé. En prenant une ligne de terre x_1y_1 perpendiculaire à xy , le plan devient de bout. Nous faisons le changement de plan :

pour le point (a, a') qui vient en (a, a'_1),

pour le point (b, b'), de la trace Q', qui vient en (b, b'_1).

La droite ob'_1 est la trace frontale du plan rendu de bout. La perpendiculaire menée de A sur ce plan est maintenant une frontale dont la projection frontale est la perpendiculaire menée de a'_1 sur ob'_1 . Son pied a pour projection frontale m'_1 et pour projection horizontale m .

La distance du point au plan est la longueur du segment $a'm'_1$. En faisant le changement de plan inverse, on trouve les projections m et m' du pied de la perpendiculaire ($mm' = \mu m'$).

La perpendiculaire est la droite de profil ($am, a'm'$).

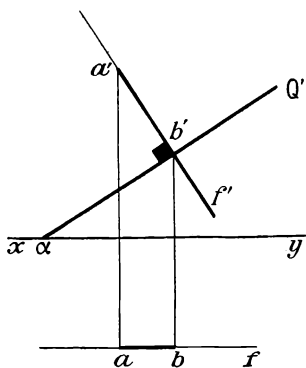


Fig. 211. — Distance d'un point à un plan de bout.

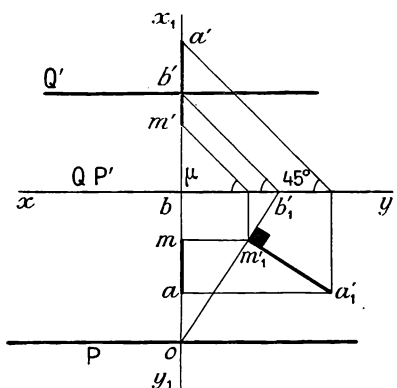


Fig. 213. — Distance d'un point à un plan parallèle à xy .

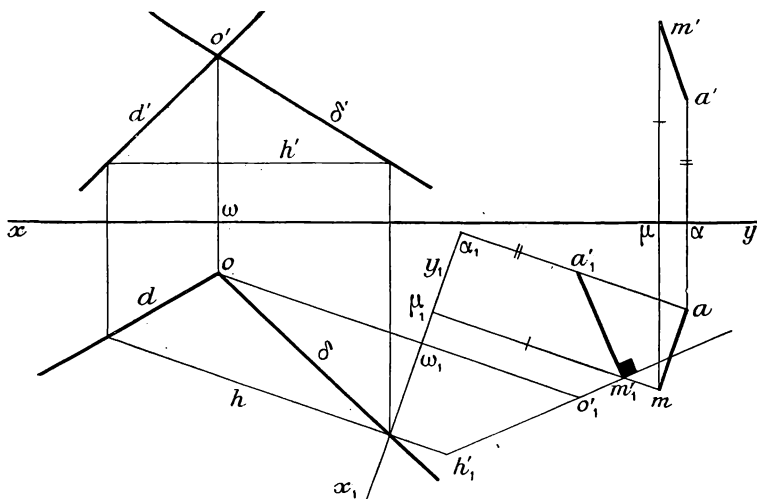


Fig. 212. — Distance d'un point à un plan défini par deux droites concourantes.

■ 97. Plus courte distance de deux droites. — Rappelons que la plus courte distance de deux droites s'obtient facilement dans les cas suivants :

1° l'une des droites est verticale (ou de bout) (fig. 146);

2° les deux droites sont horizontales (ou frontales) (fig. 147);

Mais on ne peut ramener le cas général à l'un de ceux-ci par un seul changement de plan.

3° Dans le cas de deux droites quelconques :

—> Pour trouver la plus courte distance de deux droites, on cherche la distance d'un point de l'une des droites au plan parallèle à cette droite mené par l'autre.

On est donc amené à chercher la distance d'un point à un plan, défini par deux droites concourantes. Nous savons qu'il suffit de rendre ce plan de bout par un changement de plan frontal (ou de le rendre vertical par un changement de plan horizontal). *Un seul changement de plan* est donc nécessaire.

La plus courte distance étant trouvée, une translation permet de mettre en place, si cela est demandé, la perpendiculaire commune aux deux droites.

EXEMPLE. — On donne les droites (d, d') et (δ, δ') . Déterminer leur plus courte distance et construire les projections de leur perpendiculaire commune (fig. 214. I).

Par le point (m, m') de (δ, δ') on a mené la droite (d, d'_1) parallèle à (d, d') . La droite $(\alpha\beta, \alpha'\beta')$ est une horizontale du plan ainsi déterminé. Prenons la ligne de terre x_1y_1 perpendiculaire à $\alpha\beta$. Le point (m, m') a pour nouvelles projections (m, m'_1) et $\gamma m'_1$ est la trace frontale du plan de bout.

Un point (p, p') de (d, d') devient (p, p'_1) . La perpendiculaire au plan est $(ph, p'_1h'_1)$. Sa vraie grandeur est $p'_1h'_1$.

Une translation parallèle à (d) amène ph en ab , d'où la projection frontale $a'b'$. Les points (a, a') et (b, b') sont les pieds de la perpendiculaire commune aux deux droites.

4° Si l'une des droites est frontale (ou horizontale), un seul changement de plan permet de la rendre verticale (ou de bout).

EXEMPLE. — Trouver la plus courte distance et la perpendiculaire commune à une frontale (f, f') et à une droite quelconque (d, d') .

Nous ferons un changement de plan horizontal pour rendre la droite (f, f') verticale (fig. 214. II). La nouvelle ligne de terre x_1y_1 est perpendiculaire à f' .

La droite (f, f') devient la verticale (f_1, f') de même éloignement. On a obtenu la nouvelle projection horizontale (d_1) de la droite (d, d') en faisant le changement de plan pour deux points (a, a') et (b, b') .

Dans le nouveau système, la perpendiculaire commune est horizontale. Sa projection horizontale est obtenue en menant la perpendiculaire f_1h_1 sur (d_1) . Nous rappelons h_1 en h' sur (d') et nous en déduisons sa projection frontale $h'm'$.

La plus courte distance des deux droites est f_1h_1 .

En rappelant les points h' et m' en h et m respectivement sur (d) et sur (f) , on obtient la perpendiculaire commune aux deux droites : c'est la droite $(hm, h'm')$.

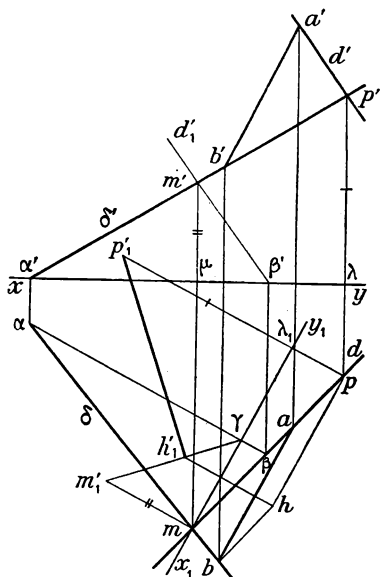


Fig. 214. I. — Plus courte distance de deux droites quelconques.

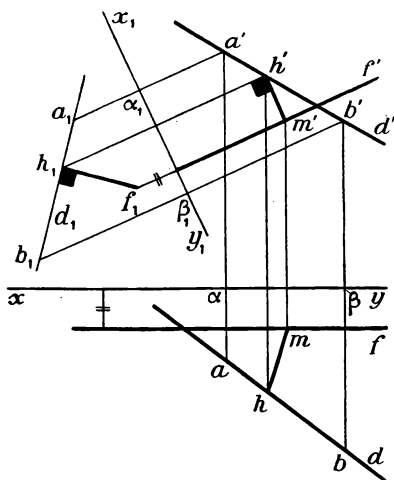


Fig. 214. II. — Perpendiculaire commune à une frontale et à une droite quelconque.

■ 98. **Angle de deux droites.** — On peut supposer les droites concourantes; sinon, par un point de l'une, on mène la parallèle à l'autre. La règle est la suivante :

→ Pour mettre en évidence les angles formés par deux droites concourantes, on rabat le plan de ces droites.

Si aucune des droites n'a de position particulière, on rabattra sur un plan horizontal ou sur un plan frontal.

Si l'une des droites est horizontale, le rabattement se fera sur un plan horizontal. Si l'une des droites est frontale, le rabattement se fera sur un plan frontal.

EXEMPLE. — Évaluer l'angle de deux demi-droites concourantes et construire les projections de la bissectrice de cet angle (fig. 215).

Remarquons que la propriété, pour une demi-droite, d'être bissectrice d'un angle ne se conserve pas en projection, en général.

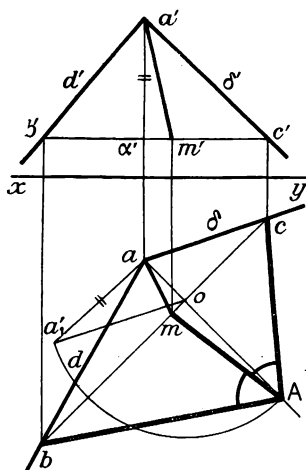


Fig. 215. — Angle de deux droites. Projections d'une bissectrice.

Soit les deux demi-droites $(ad, a'd')$ et $(a\delta, a'\delta')$. Nous traçons l'horizontale $(bc, b'c')$ et nous rabattons le plan des deux droites autour de cette horizontale. Les points (b, b') et (c, c') situés sur la charnière restent fixes. Il suffit de rabattre le point (a, a') . La règle du triangle rectangle $(aa_i = \alpha'a'; oa_i = oA)$ donne le point A .

L'angle $\widehat{bAc}$ est l'angle demandé.

Traçons la bissectrice Am de l'angle $\widehat{bAc}$, le pied m étant sur la charnière. Le point m se rappelle en m' sur $b'c'$.

Les projections de la bissectrice sont : am et $a'm'$.

■ 99. Angle d'une droite et d'un plan. — L'angle d'une droite et d'un plan est l'angle aigu que fait cette droite avec sa projection orthogonale sur le plan. C'est aussi l'angle complémentaire de l'angle aigu que

fait la droite avec une normale au plan. On est donc ramené au problème précédent.

→ Pour construire l'angle d'une droite et d'un plan, on prend le complément de l'angle aigu que fait la droite avec une normale au plan.

EXEMPLE. — Trouver l'angle de la ligne de terre et d'un plan $P\alpha Q'$ défini par ses traces (fig. 216).

Nous prenons un point (a, a') sur la ligne de terre xy et nous menons la perpendiculaire $(ad, a'd')$ au plan : ad est perpendiculaire à αP et $a'd'$ est perpendiculaire à $\alpha Q'$. Nous devons chercher l'angle de xy et de cette droite. Pour cela nous rabattons le plan de ces deux droites sur le plan horizontal de projection. La charnière est xy . Un point (b, b') de la droite $(ad, a'd')$ se rabat en B à l'aide de la règle du triangle rectangle.

L'angle $\widehat{x\alpha B}$ est l'angle de xy et de la normale au plan.

L'angle de xy et du plan en est le complément, c'est l'angle $\widehat{zaB}$.

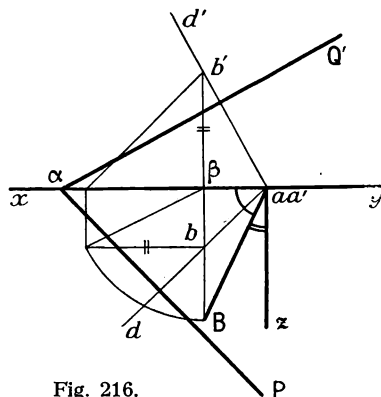


Fig. 216.

■ 100. Angles d'une droite et des plans de projection.

— Nous avons déjà donné des solutions permettant d'évaluer l'angle d'une droite et d'un plan de projection :

solution directe au n° 19;

par changement de plan au n° 70; par rotation au n° 78.

Nous allons résumer, sur une seule épure, les constructions à faire pour évaluer : l'angle α de la droite et du plan horizontal de projection et l'angle β de la droite et du plan frontal de projection. Nous choisissons la méthode par rotation.

Prenons sur la droite deux points (a, a') et (b, b') (fig. 217). En faisant tourner la droite autour de la verticale du point A, on peut la rendre frontale dans la position $(ab_1, a'b_1')$. L'angle de la droite et du plan horizontal est $\alpha = \widehat{a'b_1'b}$.

En faisant tourner la droite autour de la droite de bout du point A, on peut la rendre horizontale dans la position $(ab_2, a'b_2')$. L'angle de la droite et du plan frontal est $\beta = \widehat{ab_2b}$.

Notons que l'on a : $a'b_1' = ab_2$, car ces segments représentent la distance des deux points A et B.

Inversement, soit à mener par un point donné une droite faisant des angles donnés avec les plans de projection.

Soit (a, a') le point donné. Nous aurons résolu le problème en construisant la figure 217 dans l'ordre inverse.

Menons par (a, a') une frontale faisant l'angle α avec le plan horizontal et prenons sur cette frontale un point (b_1, b_1') . Menons par (a, a') une horizontale faisant l'angle β avec le plan frontal et prenons sur cette horizontale un point (b_2, b_2') tel que : $a'b_1' = ab_2$.

Nous prenons ensuite l'intersection du cercle de centre a et de rayon ab_1 et de la parallèle à xy menée par b_2 . Soit b l'un des points d'intersection que nous rappelons en b' sur l'horizontale de b_1' .

La droite $(ab, a'b')$ répond à la question d'après l'étude directe.

La construction n'est possible que si b_2b coupe le cercle de centre a et de rayon ab_1 , donc si :

$$ab_1 > ab_2 \sin \beta$$

$$\text{ou : } a'b_1' \cos \alpha > ab_2 \sin \beta. \quad \text{Or : } a'b_1' = ab_2$$

$$\text{donc : } \cos \alpha > \sin \beta$$

et, puisqu'il s'agit d'angles aigus : $\sin(90^\circ - \alpha) > \sin \beta$

$$\alpha + \beta < 90^\circ.$$

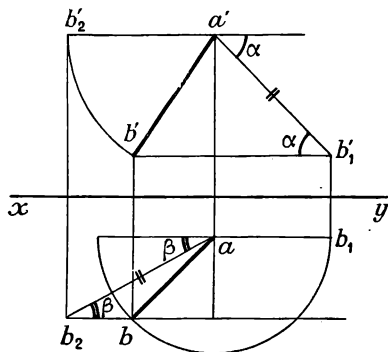


Fig. 217.

Si $\alpha + \beta < 90^\circ$, la droite b_2b coupe le cercle en un autre point qui conduit à une autre solution symétrique de la solution construite par rapport au plan de profil du point $A(a, a')$.

On aurait pu aussi porter la longueur ab_2 dans l'autre sens, d'où deux autres solutions symétriques des deux précédentes par rapport au plan de front de A . En tout, 4 solutions.

Si $\alpha + \beta = 90^\circ$, on n'obtient plus que deux solutions de profil.

Si $\alpha + \beta > 90^\circ$, le problème est impossible.

■ **101. Angle de deux plans.** — Deux plans forment quatre dièdres deux à deux égaux et deux à deux supplémentaires. Il s'agit d'évaluer les angles des rectilignes de ces dièdres.

→ 1° Pour trouver les angles de deux plans on les coupe par un plan perpendiculaire à leur intersection et on cherche les angles des droites obtenues.

On peut aussi remarquer que les normales menées d'un point aux deux plans font les mêmes angles que les plans. En effet, le plan de ces normales est perpendiculaire à l'intersection des deux plans et, dans ce plan, elles sont respectivement perpendiculaires aux côtés du rectiligne.

→ 2° Pour trouver les angles formés par deux plans, on cherche les angles formés par des normales à ces plans, issues d'un point quelconque.

Nous obtenons ici deux méthodes. Elles se ramènent toutes deux à la recherche de l'angle de deux droites.

La deuxième méthode paraît plus simple, car la construction de la normale à un plan est plus rapide que la détermination de l'intersection de deux plans. Toutefois elle ne résout pas toujours entièrement la question.

S'il s'agit de plans illimités, l'angle cherché n'est pas nettement défini; son supplément convient aussi. Dans ce cas, on peut utiliser l'angle des normales sans inconvénient.

S'il s'agit de deux demi-plans formant un dièdre, l'utilisation des normales ne permet pas de préciser. Il faut avoir recours à la première méthode.

En outre, l'emploi de la première méthode permet de résoudre d'autres questions liées aux deux plans, par exemple, de construire les plans bissecteurs.

EXEMPLES. — I. Angles des deux plans projetant une droite D (d, d') (fig. 218).

Il s'agit de trouver l'angle du plan vertical (d) et du plan de bout (d'). Par un point (a, a') arbitraire, menons les normales aux deux plans. Ce sont l'horizontale (h, h') et la frontale (f, f'). Pour trouver les angles de ces droites, nous rabattons leur plan autour de (h, h'). Le point (b, b') de la frontale est rabattu en B : $aB = a'b'$. La frontale est rabattue en aB .

Les angles des plans sont ceux des droites ah et aB . On a marqué l'un des angles aigus.

II. Angles de deux plans définis par leurs traces et détermination des plans bissecteurs (fig. 219).

Soit les plans $P\alpha Q'$ et $R\beta S'$. Nous supposons que leurs traces de même nom se coupent dans les limites du dessin. L'intersection des deux plans est la droite ($ab, a'b'$). Prenons sur cette droite un point (c, c') et coupons les deux plans par le plan (Π)

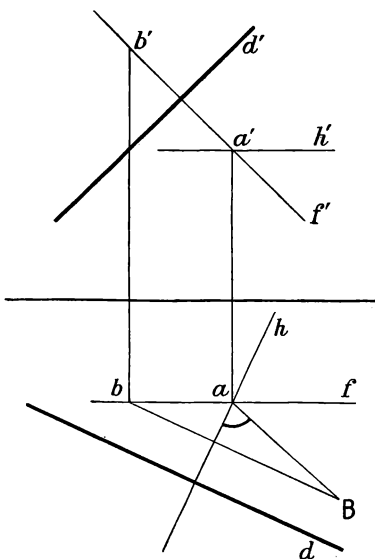


Fig. 218.

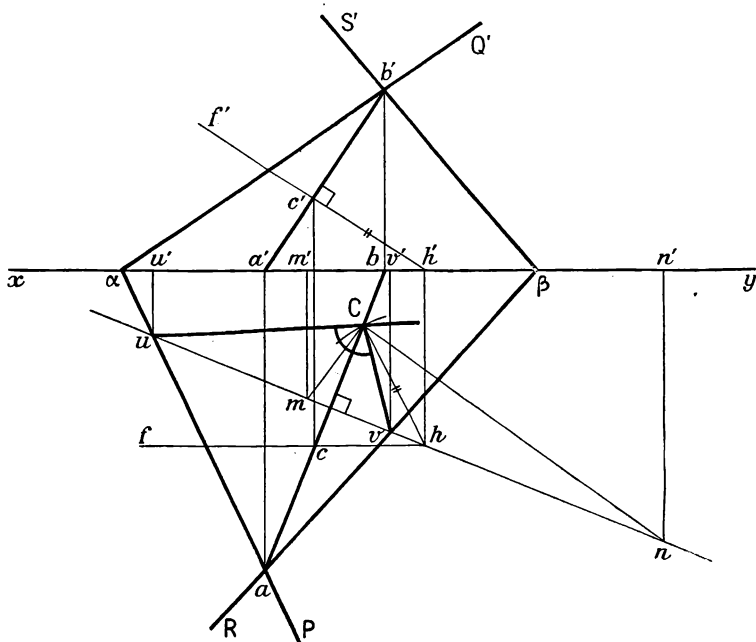


Fig. 219.

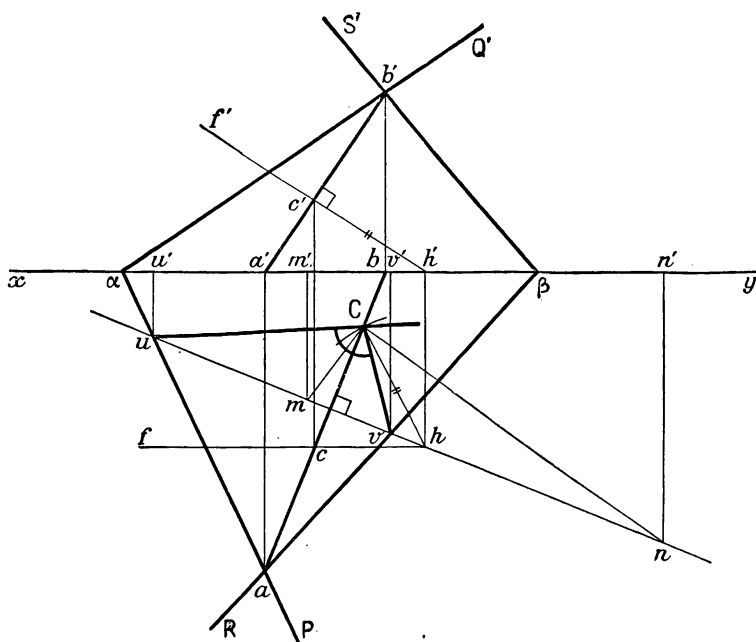


Fig. 219.

mené par (c, c') perpendiculairement à leur intersection. Pour cela, nous traçons la frontale $(cf, c'f')$ du plan (II) : $c'f'$ est perpendiculaire à $a'b'$. La trace horizontale de cette frontale est le point (h, h') . La trace horizontale du plan (II) est donc la perpendiculaire menée de h à ab (n° 57). Elle coupe les traces horizontales des plans donnés respectivement en u et v . Les côtés du rectiligne de l'un des dièdres formés par les deux plans sont donc : $(cu, c'u')$ et $(cv, c'v')$ (non tracés sur la figure).

Il reste à évaluer l'angle de ces deux droites. Nous rabattons leur plan sur le plan horizontal de projection autour de la charnière uv .

Nous obtenons le rabattement de (c, c') en C par le procédé de la frontale : $hC = h'c'$.

Un des angles des deux plans est l'angle $\widehat{uCv}$.

Après le rabattement, les bissectrices des rectilignes sont rabattues suivant les bissectrices Cm et Cn de l'angle uCv . Les points m et n étant sur la charnière, nous en concluons que les plans bissecteurs sont les plans passant par l'arête (ab, ab') et contenant respectivement les points (m, m') et (n, n') .

III. Évaluer l'angle dièdre formé par deux demi-plans. Construire le plan bissecteur du dièdre. L'arête du dièdre est frontale (fig. 220).

Comme nous l'avons remarqué, l'utilisation des normales aux plans est ici insuffisante. Il nous faut chercher le rectiligne du dièdre.

Nous supposons chacun des demi-plans définis par l'arête frontale (f, f') et par un point : A (a, a') pour l'un et B (b, b') pour l'autre.

On pourrait employer la même méthode qu'à l'exemple II. Nous allons montrer qu'un changement de plan permet de donner une solution simple.

Faisons un changement de plan horizontal pour rendre l'arête verticale. La nouvelle ligne de terre x_1y_1 est perpendiculaire à (f') . La projection horizontale nouvelle de l'arête est f_1 , celles des points A et B sont a_1 et b_1 :

$$(\alpha a = \alpha_1 a_1, \quad \beta b = \beta_1 b_1).$$

Les deux demi-plans sont alors verticaux et l'angle dièdre est en évidence. C'est l'angle : $\widehat{a_1 f_1 b_1}$.

Dans le nouveau système de projection, le plan bissecteur a pour trace horizontale la bissectrice de l'angle $\widehat{a_1 f_1 b_1}$. Prenons sur elle un point m_1 auquel nous pouvons attribuer une cote arbitraire : nous la prendrons nulle.

Le changement de plan inverse donne le point (m, m') tel que $\mu m = m' m_1$.

Le plan bissecteur est le plan défini par l'arête (f, f') et le point (m, m') .

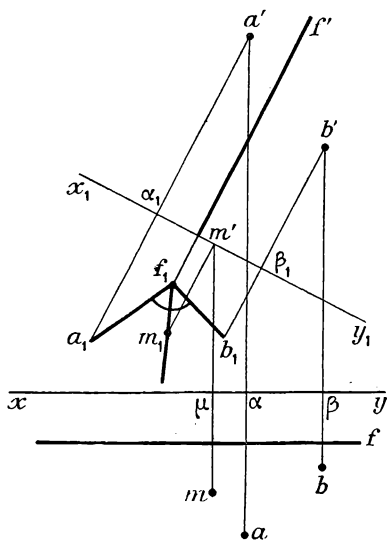


Fig. 220.

■ 102. Angles d'un plan et des plans de projection. — Nous avons déjà donné des solutions permettant d'évaluer l'angle d'un plan et d'un plan de projection (nos 38, 72, 80).

Nous ne reprendrons pas ces constructions. Nous indiquerons seulement que les angles aigus α_1 et β_1 que fait la normale avec les plans de projection sont les compléments respectifs des angles aigus α et β du plan et des plans de projection.

Inversement, pour mener par un point donné un plan faisant l'angle aigu α avec le plan horizontal et l'angle aigu β avec le plan frontal, on peut mener par ce point une droite faisant des angles : $\alpha_1 = 90^\circ - \alpha$ et $\beta_1 = 90^\circ - \beta$ avec les plans de projection. Le plan cherché est perpendiculaire à la droite construite.

Le problème n'est possible que si (n° 101) :

$$\alpha_1 + \beta_1 < 90^\circ$$

soit :

$$\alpha + \beta > 90^\circ.$$

Si $\alpha + \beta > 90^\circ$, il y a quatre solutions.

Si $\alpha + \beta = 90^\circ$, il n'y a plus que deux solutions (plans parallèles à la ligne de terre).

EXERCICES

Déterminer la distance d'un point à un plan dans les cas suivants :

150. — Le plan est le premier bissecteur (ou le second bissecteur).

151. — Le plan a ses traces confondues.

Construire la perpendiculaire commune à deux droites dans les cas suivants :

152. — xy et une droite quelconque. Cas où la droite est de profil.

153. — Une frontale et une droite de profil.

154. — Les deux droites sont de profil.

155. — Une droite du second bissecteur et une perpendiculaire au second bissecteur.

Déterminer l'angle de deux droites concourantes et construire leurs bissectrices dans les cas suivants :

156. — Une droite verticale et une droite quelconque.

157. — Une droite de profil et une droite quelconque.

158. — Une droite du premier bissecteur et une droite du second bissecteur.

159. — Les deux droites sont les traces d'un plan $P\alpha Q'$.

Évaluer l'angle d'une droite et d'un plan dans les cas suivants :

160. — Le plan est de bout, la droite est quelconque.

161. — Le plan est défini par ses traces, la droite est frontale.

162. — Le plan passe par la ligne de terre, la droite est quelconque.

Évaluer l'angle de deux plans et déterminer les plans bissecteurs dans les cas suivants :

163. — Un plan est de bout, l'autre est quelconque (défini par ses traces).

164. — Les deux plans sont définis par leurs traces et, pour chacun d'eux, les traces sont confondues sur l'épure.

165. — Chacun des plans est défini par une ligne de pente.

166. — Les traces frontales des deux plans sont parallèles (faire un changement de plan horizontal pour rendre les deux plans verticaux).

167. — On donne : les projections horizontales, les traces horizontales des deux côtés d'un angle, la grandeur de l'angle.

Trouver les projections frontales des côtés de l'angle.

168. — On donne une droite horizontale (h , h') et la projection horizontale (d) d'une deuxième droite qui rencontre la première. Trouver la projection frontale (d') pour que l'angle des deux droites soit égal à un angle donné α .

EXERCICES SUR LE CHAPITRE IV

169. — 1° Faire tourner un plan donné autour d'un axe de bout donné pour l'amener à passer par un point donné.

2° Choisir un axe de bout tel qu'en faisant tourner un plan donné autour de cet axe, on l'amène à contenir une droite donnée.

170. — 1° Amener, par une rotation autour d'un axe vertical donné, un point donné à être situé dans un plan donné.

2° On donne trois points A, B, C et un axe vertical. Faire tourner le point A autour de l'axe pour l'amener à égale distance de B et de C.

Avec les mêmes données, faire tourner le segment BC autour de l'axe pour que les points B et C se placent à la même distance de A.

171. — 1° Faire tourner une droite donnée autour d'un axe vertical donné jusqu'à ce qu'elle rencontre une verticale donnée. Discuter.

2° Faire tourner une droite donnée autour d'un axe vertical donné jusqu'à ce qu'elle rencontre une droite de bout donnée (on ne discutera pas).

172. — On donne deux points A (a, a') et B (b, b') de même cote. Construire un triangle équilatéral ABC, connaissant la projection horizontale ad de la droite qui porte le côté AC.

173. — On donne les projections a et a' d'un point. Son rabattement autour d'une droite horizontale du plan horizontal de projection est un point A donné. Construire la charnière.

2° Construire les traces d'un plan connaissant les projections (m, m') d'un de ses points et le rabattement M de ce point, la charnière étant la trace horizontale (inconnue) du plan.

174. — 1° On donne les projections des trois points F, G, M. Déterminer les projections des sommets de l'ellipse qui a pour foyers F et G et qui passe par M. Construire les projections des tangentes aux sommets.

2° On donne les projections d'un point F et d'une droite (D). Déterminer les projections du sommet de la parabole admettant F pour foyer et (D) pour directrice. Déterminer les projections des points de la parabole où les tangentes font 45° avec l'axe de la parabole; construire les projections de ces tangentes.

175. — Déterminer l'intersection d'une droite de profil avec les plans bissecteurs.

176. — Peut-on par un ou plusieurs changements de plan (ou par des rotations) :

1° rendre de front deux droites données?

2° rendre verticaux deux plans donnés?

3° rendre de profil un plan donné?

177. — Faire tourner autour d'un axe convenable un système de deux plans donnés afin qu'après rotation leurs traces horizontales soient parallèles (on considérera la droite d'intersection des deux plans).

178. — On donne par leurs projections trois points quelconques. Faire un changement de plan de façon que les nouvelles projections horizontales soient alignées.

179. — 1° Par un point A (a, a') on mène une droite (d, d') et un plan $P\alpha Q'$. Faire tourner la droite (d, d') autour d'un axe vertical passant par A de façon qu'après rotation la droite soit contenue dans le plan.

2° Faire tourner une droite donnée autour d'un axe vertical pour qu'après rotation sa projection frontale ait une direction donnée.

3° Faire tourner une droite donnée autour d'un axe vertical pour qu'après rotation ses projections soient parallèles (ou aient des directions symétriques par rapport à la ligne de terre).

180. — Faire tourner un plan autour d'un axe vertical jusqu'à ce qu'il soit parallèle à une droite donnée.

181. — Mener, par une droite horizontale donnée, un plan situé à une distance donnée d'un point donné. (Faire un changement de plan pour rendre la droite de bout.)

182. — On donne : un plan par deux droites concourantes, la projection horizontale d'un point de l'espace et la distance du point au plan. Trouver la projection frontale du point. (Faire un changement de plan pour rendre le plan de bout.)

183. — 1° On donne un point (a, a') et une droite horizontale (h, h') . Trouver la distance du point à la droite en faisant un changement de plan qui rend l'horizontale de bout.

2° Étant donné les projections d'un point, la projection horizontale d'une horizontale ainsi que la distance du point à la droite, trouver la projection frontale de la droite.

184. — Un plan $P \propto Q'$ est défini par ses traces. On donne une droite (d, d') par ses projections, (d) étant perpendiculaire à αP .

1° Faire un changement de plan frontal pour rendre le plan de bout. Quelle est la position de la droite dans ce nouveau système?

2° Évaluer l'angle de la droite et du plan.

185. — Mener un plan situé à une distance donnée d'un plan donné.

186. — On donne un plan (P) par une horizontale (h, h') et un point (a, a') . Mener par l'horizontale un plan qui fasse un angle donné avec le plan (P) . (Faire un changement de plan qui rende l'horizontale de bout.)

187. — Construire une verticale connaissant ses plus courtes distances à une verticale donnée et à une autre droite donnée.

188. — On donne les projections d'une horizontale (h, h') , les projections d'un point $A (a, a')$ et la projection horizontale (d) d'une droite passant par A . Trouver la projection frontale (d') de la droite de façon que la plus courte distance de cette droite et de l'horizontale (h, h') soit égale à une longueur donnée. (Faire un changement de plan qui rendra (h, h') de bout.)

189. — On donne une droite par ses projections; faire un changement de plan horizontal de façon que, dans le nouveau système, la droite soit située dans le second bissecteur. (On fera le changement de plan pour un point (a, a') et on exprimera que la nouvelle projection horizontale a_1 est confondue avec a' .)

190. — Dans le rabattement d'un plan autour d'une horizontale (h, h') , un point (m, m') se rabat en M , et sur le dessin la droite mM , perpendiculaire à h , coupe la charnière en O . Montrer qu'en orientant dans un sens arbitraire la perpendiculaire à h , le rapport : $\frac{Om}{OM}$ est constant. Évaluer la constante

en fonction de l'angle θ du plan et du plan horizontal.

Cette correspondance entre m et M s'appelle une *affinité normale*. La droite (h) est l'axe de l'affinité.

191. — On donne la trace horizontale αP d'un plan, construire la trace frontale $\alpha Q'$ de manière que son rabattement sur le plan horizontal de projection soit confondu avec elle.

192. — On donne un point (a, a') et les projections horizontales oa et ob de deux droites concourantes. Construire les projections frontales de ces droites, sachant que si l'on rabat leur plan sur le plan horizontal du point (a, a') leur point de concours se rabat en un point donné O .

193. — Trouver la projection frontale d'une droite connaissant sa projection horizontale (d), sa trace horizontale (a, a') et sachant qu'elle fait un angle donné α avec le plan horizontal.

Même question, mais en donnant l'angle β qu'elle fait avec le plan frontal.

194. — 1° Indiquer la méthode géométrique permettant de résoudre le problème suivant :

Mener, dans un plan donné (P), par un point donné A de ce plan, une droite faisant un angle donné α avec une droite donnée (D).

2° Faire les constructions en supposant que (D) est la ligne de terre, que le plan (P) passe par la ligne de terre et A, que $\alpha = 45^\circ$.

3° Mener, dans un plan donné de bout, par un point donné (a, a') de ce plan, une droite faisant un angle donné β avec le plan horizontal.

195. — Mener, par une droite donnée, un plan faisant un angle donné avec le plan horizontal.

196. — On donne une droite horizontale (h, h') et deux points A (a, a') et B (b, b') non situés sur la droite. Construire un point M sur la droite pour que la ligne brisée AMB soit la plus courte possible.

197. — Faire tourner une droite, définie par ses projections, autour d'un axe horizontal (à choisir) de manière à la rendre verticale.

198. — Faire tourner un point A autour d'une verticale donnée jusqu'à ce que la perpendiculaire abaissée de ce point sur un plan (P) donné, de bout, rencontre une droite donnée (D).

199. — On donne les deux projections d'un angle dont un côté est horizontal. Faire tourner cet angle autour du côté horizontal jusqu'à ce que l'autre côté rencontre une verticale donnée.

200. — Construire la projection frontale d'un triangle ABC, rectangle en A, connaissant sa projection horizontale et sachant que l'hypoténuse est portée par une horizontale de cote donnée.

201. — Une droite est donnée par ses projections; mener par sa trace horizontale, dans le plan horizontal de projection, une droite faisant avec la droite donnée un angle donné.

202. — On donne trois droites parallèles. Trouver la distance de l'une d'elles au plan des deux autres.

203. — Mener, par une droite de profil, définie par ses traces, un plan dont les traces font entre elles, dans l'espace, un angle de 45° .

204. — Mener, par une droite qui rencontre la ligne de terre, un plan tel que cette droite soit bissectrice de l'angle que forment, dans l'espace, les traces du plan.

205. — On donne, pour construire les projections d'un triangle ABC : les projections (a, a') d'un sommet; les projections horizontales b et c des deux autres sommets; l'angle du côté AB avec le plan horizontal (la cote de B est supérieure à la cote de A).

Il y a une infinité de triangles satisfaisant à ces conditions.

Construire celui dont l'aire est minimum.

206. — Sur un segment de front pris comme diagonale, construire un carré incliné à 60° sur le plan frontal.

207. — Construire les projections d'un carré, connaissant les projections d'une diagonale qui est une ligne de pente du plan du carré.

208. — On donne une horizontale (h, h') et un point (o, o'). Construire les projections de l'hexagone régulier qui a pour centre (o, o') et dont un côté est porté par (h, h').

Droites faisant des angles égaux avec deux droites données.

209. — Il a été démontré (*Géométrie*, Cl. de Première C et M, p. 60) que le lieu géométrique des demi-droites issues d'un point O et qui font avec deux demi-droites Ox et Oy des angles égaux est le plan déterminé par la bissectrice de l'angle xOy et par la normale en O au plan xOy.

En déduire que les droites de l'espace qui font des angles égaux avec deux droites données (D) et (Δ) — sans rencontrer ces droites — sont parallèles à l'un ou à l'autre de deux plans fixes que l'on précisera.

210. — Construire la projection frontale d'une droite dont on donne la projection horizontale, sachant que cette droite fait des angles égaux avec deux droites horizontales données.

211. — Construire une droite parallèle à un plan donné, de bout, sachant qu'elle rencontre deux droites horizontales données en faisant avec elles des angles égaux.

212. — Mener, par un point donné, une droite faisant des angles égaux avec deux frontales données et faisant un angle droit avec une autre droite donnée.

213. — On donne un point A et trois droites (D_1), (D_2), (D_3). Mener par le point une droite faisant des angles égaux avec les trois droites données. (Par le point A, on mènera des parallèles aux trois droites données, on portera sur ces droites à partir de A des longueurs égales AA_1 , AA_2 , AA_3 . Montrer que la droite cherchée est perpendiculaire au plan A_1, A_2, A_3 .) Nombre de solutions.

214. — Par un point, mener une droite parallèle à un plan donné par ses traces, sachant qu'elle fait des angles égaux avec les plans de projection.

215. — Par une droite donnée, mener un plan faisant des angles égaux avec les plans de projection.

ÉPURES

216. — On donne les deux points A et B situés sur une même horizontale de cote 2. Les coordonnées de A sont en cm :

$$x = 5; \quad y = -6; \quad z = 2.$$

La droite AB fait 45° avec le plan frontal, la distance AB est égale à 5, l'éloignement de B est supérieur à 5.

Un carré ABCD a pour sommets consécutifs A et B, son plan fait 45° avec le plan horizontal de projection, la cote du point C est supérieure à 2.

1° Déterminer les projections du carré ABCD.

2° Construire un point S, de cote supérieure à 2, situé à la distance 10 du plan du carré, sur la perpendiculaire à ce plan menée par le centre du carré.

3° Ce point S est un point lumineux. Construire l'ombre portée par le carré, plein, sur les plans de projections opaques.

217. — On donne le point A de coordonnées (en cm) :

$$x = 0; \quad y = 0; \quad z = 4.$$

1° Construire les projections du point B ($y < 0$), de cote $z = 0$, d'éloignement $x = 7$ tel que la distance AB soit égale à 9.

2° Déterminer les projections d'un triangle ABC isocèle, rectangle en C, tel que son plan fasse 45° avec le plan horizontal de projection. On choisira celui des plans qui coupe la ligne de terre à droite du grand axe de la feuille et dans ce plan on choisira C à gauche de ce grand axe.

3° Évaluer l'angle du plan ABC et du plan frontal.

4° Quelle est l'ombre portée par le triangle ABC, sur le plan horizontal de projection, plein et opaque, lorsqu'on l'éclaire par des rayons lumineux parallèles à la trace frontale de son plan?

CHAPITRE V

PYRAMIDES ET PRISMES

- 1. *Représentation d'une pyramide.*
- 2. *Représentation d'un prisme.*
- 3. *Tétraèdre régulier et cube.*

1

REPRÉSENTATION D'UNE PYRAMIDE

■ 103. **Représentation d'un polyèdre¹.** — Un polyèdre est, généralement, donné par les projections de ses sommets.

Les projections des arêtes s'en déduisent d'après la définition du polyèdre.

Il reste à effectuer la ponctuation en supposant que l'intérieur du polyèdre est opaque. Il suffit, pour cela, d'observer les règles énoncées au n° 51 et que nous rappelons :

- > De plusieurs points situés sur une même verticale, seul celui qui a la plus grande cote est vu **en projection horizontale**. Les autres sont cachés.
- > De plusieurs points situés sur une même droite de bout, seul celui qui a le plus grand éloignement est vu **en projection frontale**. Les autres sont cachés.

Nous allons étudier, d'abord, les représentations de polyèdres simples et nous en déduirons quelques résultats généraux.

■ 104. **Représentation d'un tétraèdre.** — Un tétraèdre est défini par ses quatre sommets A (a, a'), B (b, b'), C (c, c'), D (d, d'). On trace les projections des six arêtes AB, AC, AD, BC, BD, CD. Il reste à ponctuer.

1. MAILLARD-MILLET : *Géométrie*, Cl. de Première C et M., chap. IX.

EXEMPLES. — I. Soit le cas de la figure 221.

En projection horizontale, les arêtes ac , cb , bd et da limitent un quadrilatère convexe à l'intérieur duquel se projettent toutes les faces du tétraèdre. Il en résulte que l'arête ac ne peut être cachée par aucun point du tétraèdre. Elle est donc vue ainsi que cb , bd et da . Le contour $acbdba$ est dit le **contour apparent** du tétraèdre en projection horizontale.

Il reste à ponctuer les deux arêtes ab et cd . La projection frontale montre que les points de l'arête AB ont des cotes supérieures à celles des points de l'arête CD . Il en résulte que ab est vue et que cd est cachée.

On voit, en projection horizontale, les deux faces ABD et ABC . Les deux autres sont cachées.

En projection frontale, les arêtes $a'c'$, $c'd'$ et $d'a'$ limitent un triangle à l'intérieur duquel se projettent toutes les faces du tétraèdre. Il en résulte que l'arête $a'c'$ ne peut être cachée par aucun point du tétraèdre. Elle est donc vue ainsi que $c'd'$ et $d'a'$. Le contour $a'c'd'a'$ est dit le **contour apparent** du tétraèdre en projection frontale.

Il reste à ponctuer les trois autres arêtes. La projection horizontale montre que le point B est, de tous les points du tétraèdre, celui qui a l'éloignement le plus grand. Il est donc vu ainsi que les trois arêtes $b'a'$, $b'c'$ et $b'd'$.

En projection frontale, seule la face ACD est cachée.

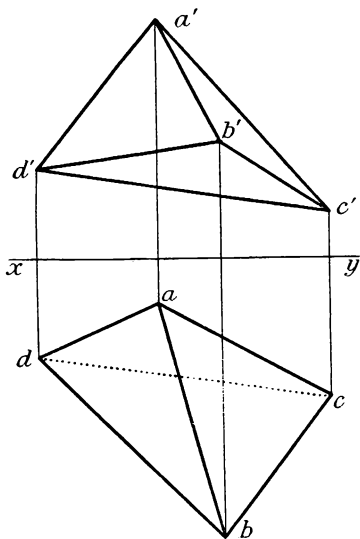


Fig. 221.

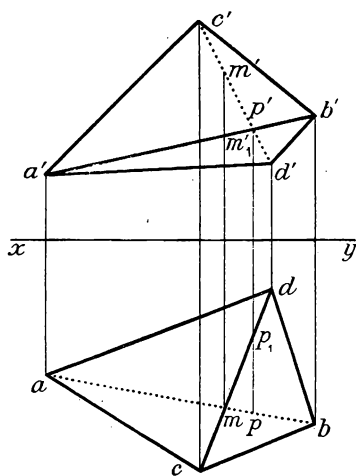


Fig. 222.

II. Soit le cas de la figure 222.

En projection horizontale, on obtient le contour apparent $acbd\dot{a}a$. Il reste à ponctuer les arêtes ab et cd . Nous ne pouvons pas conclure aussi rapidement que dans le cas de la figure 221. Considérons la

verticale qui s'appuie sur AB et CD. Elle rencontre CD en (m, m') et AB en (m, m') . Le point (m, m') qui a la plus grande cote est vu, donc l'arête cd est vue. L'arête ab est cachée. On voit les deux faces ACD et BCD.

En projection frontale, on obtient le contour apparent $a'c'b'd'a'$. Il reste à ponctuer les arêtes $a'b'$ et $c'd'$. Considérons la droite de bout qui s'appuie sur AB et CD. Elle rencontre AB en (p, p') et CD en (p_1, p') . Le point (p, p') qui a le plus grand éloignement est vu, donc l'arête $a'b'$ est vue. L'arête $c'd'$ est cachée. On voit les deux faces ABC et ABD.

■ 105. **Représentation d'une pyramide.** — Pour représenter une pyramide, on dessine les projections des côtés du polygone de base et les projections des arêtes latérales. Il reste à ponctuer.

Nous supposons que les sommets du polygone de base sont dans un même plan et que la pyramide, opaque, est limitée à son sommet et au plan de la base.

EXEMPLE. — La base de la pyramide est un quadrilatère convexe ABCD du plan horizontal de projection. Le sommet est le point S (s, s') (fig. 223).

On dessine les projections des côtés AB, BC, CD, DA du quadrilatère et les projections des arêtes latérales SA, SB, SC, SD.

En projection horizontale, la base de la pyramide et les faces latérales se projettent à l'intérieur du contour $sabcs$. Les arêtes de ce contour sont donc vues puisqu'aucun point de la pyramide ne peut les cacher. Il reste à ponctuer les autres arêtes.

La projection frontale montre que tous les points de l'arête SB ont des cotes positives alors que les points de l'arête AD ont des cotes nulles. Donc sb est vue et ad est cachée.

La verticale du point D coupe la face SBC en un point de cote positive, donc les arêtes dc et ds sont cachées.

En projection frontale, tous les points de la pyramide se projettent à l'intérieur du triangle $s'b'd'$. Les arêtes $s'b'$, $b'c'$, $c'd'$, $s'd'$ sont donc vues. Il reste à ponctuer $s'c'$ et $s'a'$. Or, sur la droite de bout rencontrant SC en M (m, m') , il n'y a aucun point de la pyramide dont l'éloignement est supérieur à celui de m . Donc $s'c'$ est vue; par un raisonnement analogue on verrait que $s'a'$ est cachée.

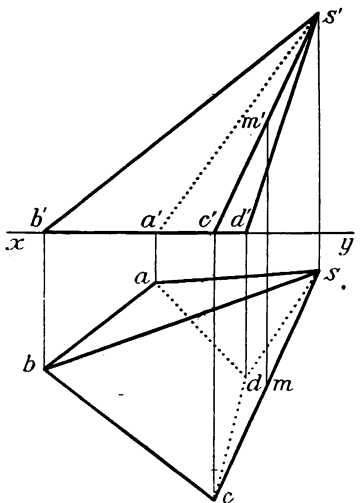


Fig. 223.

■ 106. Règles de ponctuation. — Des épures nos 221, 222, 223 on peut dégager quelques indications générales.

→ 1^o Pour établir la ponctuation d'un polyèdre, on commence par déterminer la région du plan de projection dans laquelle se projettent toutes les faces. Le contour qui limite cette région est vu : c'est le **contour apparent** de la projection du polyèdre.

En effet, aucun point du polyèdre ne peut cacher un point de ce contour.

→ 2^o Quand un sommet est caché, toutes les arêtes ou portions d'arêtes qui en partent sont cachées jusqu'aux points où elles parviennent au contour apparent.

En effet, si l'une d'elles était vue, il en serait de même du sommet en question. Par exemple, sur l'épure 223 les trois arêtes issues de *d* sont cachées en projection horizontale.

Remarquons que si un sommet est sur le contour apparent, les arêtes issues de ce point peuvent être vues ou cachées. Sur l'épure 221 les trois arêtes issues de *a'* sont vues toutes trois. Sur l'épure 222, deux des arêtes issues de *a* sont vues, une autre est cachée.

→ 3^o Deux arêtes qui se croisent en projection, sans se couper dans l'espace, ne peuvent pas être vues toutes les deux.

En effet, s'il en était ainsi, deux points différents d'une même verticale seraient vus tous les deux, ce qui est impossible.

Ces remarques simples permettent d'éviter des erreurs et de déterminer facilement la ponctuation d'un certain nombre d'arêtes.

Si la ponctuation d'un sommet *A* ne découle pas de ces remarques, on étudiera l'intersection du polyèdre et de la verticale de *A* (ou de la droite de bout, selon le plan de projection) et l'on appliquera les règles générales rappelées au n^o 103.

EXEMPLES. — I. Représenter la pyramide de sommet *S* (*s*, *s'*) et dont la base est le trapèze *ABCD* (fig. 224).

En projection horizontale, on a tracé les huit arêtes. Le contour apparent est *sdabcs*. On lit, sur la projection frontale, que l'arête *CD* est plus haute que les arêtes *SA* et *SB*. Les arêtes *sa* et *sb* sont donc cachées par le plan de la base et par la face *SCD*. Nous vérifions que les arêtes *sa* et *cd* qui se croisent en projection ne sont pas vues toutes deux.

En projection frontale, on a tracé les huit arêtes. Le contour apparent est *s'a'd'c's'*. On lit, sur la projection horizontale, que les points

de BC ont des éloignements supérieurs à ceux de SD, donc $b'c'$ est vue et $s'd'$ est cachée. Enfin l'arête $a'b'$, qui ne peut être cachée par aucun point de la pyramide, est vue.

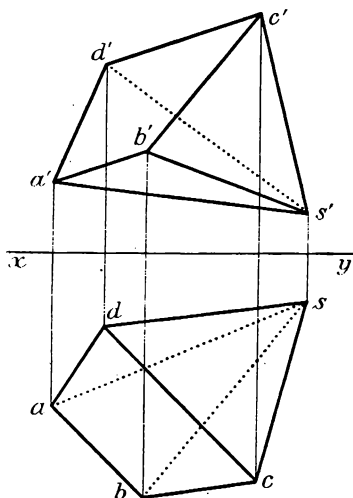


Fig. 224.

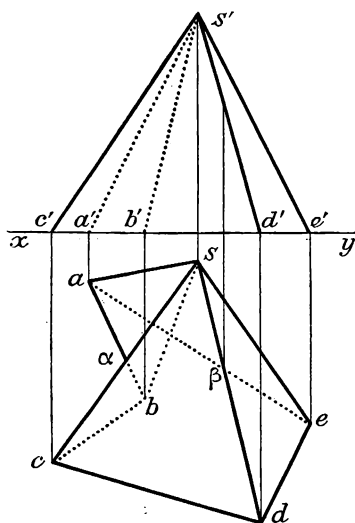


Fig. 225.

II. Représenter la pyramide de sommet S (s, s') et dont la base est un pentagone concave du plan horizontal de projection (fig. 225).

En projection horizontale, on a tracé les dix arêtes. La base de la pyramide et les faces latérales se projettent à l'intérieur du contour *sacdes* qui constitue le contour apparent. Les arêtes ou portions d'arêtes qui forment ce contour sont vues. Le point *b* de la base est caché par la face *scd*. Il en résulte que l'arête *bc*, l'arête *bs* et la portion *ba* de l'arête *ba* sont cachées (n° 106, 2°). L'arête *sc*, qui ne peut être cachée par aucun point de la pyramide, est vue.

Il reste à ponctuer sd et ae . La verticale, de pied β qui rencontre les arêtes SD et AE, n'a pas d'autre point commun avec la pyramide que les points situés sur SD et AE. On en déduit que sd est vue et ae est cachée.

En projection frontale, on voit facilement que les arêtes $s'a'$ et $s'b'$ sont cachées par la face SCD.

EXERCICES

218. — Construire les projections d'une pyramide régulière connaissant sa hauteur h et sachant que sa base, dans le plan horizontal de projection, est :

- un carré dont un côté fait 30° avec la ligne de terre;
- un hexagone dont un côté fait 45° avec la ligne de terre.

219. — Construire les projections d'une pyramide régulière connaissant la hauteur h et sachant que sa base est un carré dont on donne le centre (o, o') et la droite, horizontale, (d, d') qui porte un côté.

2

REPRÉSENTATION
D'UN PRISME

■ 107. **Représentation d'un prisme.** — Les arêtes latérales d'un prisme sont des vecteurs équipollents. Cette propriété se conserve en projection. Elle permet de construire les projections d'un prisme. Il faudra ensuite ponctuer.

EXEMPLES. — I. *Représenter le prisme triangulaire dont une base est ABC et une arête latérale est AD (fig. 226).*

Les vecteurs $\vec{be}$ et $\vec{cf}$ équipollents à $\vec{ad}$, puis les vecteurs $\vec{b'e'}$ et $\vec{c'f'}$ équipollents à $\vec{a'd'}$, déterminent les deux arêtes latérales inconnues et la seconde base DEF du prisme. Il reste à ponctuer.

En projection horizontale, le contour apparent est *adefca* dont toutes les arêtes sont vues. La projection frontale montre que l'arête BE est au-dessus de l'arête DF. Il en résulte que *df* est cachée et que *be* est vue. On en déduit aussi que le point B est au-dessus du plan ADFC et donc que les arêtes *ba* et *bc* sont vues.

En projection frontale, le contour apparent est *a'c'f'e'b'a'* dont toutes les arêtes sont vues. On lit, sur la projection horizontale, que l'arête AD est en avant de l'arête BC. Il en résulte que *b'c'* est cachée et que *a'd'* est vue. On en déduit aussi que le point D est en avant du plan BCFE et donc que les arêtes *d'e'* et *d'f'* sont vues.

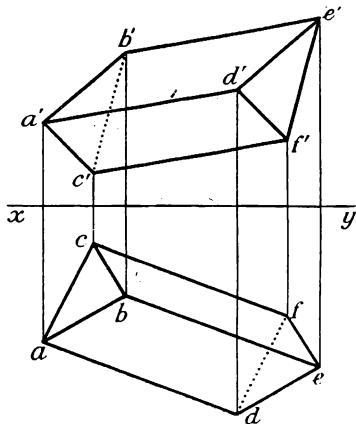


Fig. 226.

II. *Représenter le prisme droit, de hauteur donnée h , et dont la base est un parallélogramme donné ABCD.*

Sur la figure 227 les côtés opposés AB et CD du parallélogramme sont frontaux et les autres côtés AD et BC sont horizontaux. La ligne de terre *xy* est confondue avec *a'd'*.

Un changement de plan a rendu le plan ABCD de bout. La nouvelle ligne de terre x_1y_1 est perpendiculaire à *ad*. En portant $\beta_1 b'_1 = \beta b'$, on obtient la nouvelle projection frontale *b'_1* de B. Le plan ABCD devient le plan de bout dont la trace frontale est *a'_1b'_1*. Par rapport

à ce nouveau système de projection, les arêtes latérales du prisme sont frontales et leur longueur commune h se trouve en vraie grandeur en projection frontale. On en déduit les projections (m, m') , (n, n') , $(\overline{p}, \overline{p}')$, (q, q') des autres sommets M, N, P, Q du prisme droit. Par le changement de plan inverse, on construit les projections frontales $m', n', p', q' : \mu m' = \mu_1 m'_1$. A titre de vérification, les arêtes $a'm', b'n', c'p', d'q'$ doivent être perpendiculaires à $a'b'$ (frontale du plan). Il reste à ponctuer.

Le contour apparent horizontal est $abcpqma$ dont les arêtes sont vues. L'arête NP, étant la plus haute de toutes, les arêtes nm, np, nb sont vues et par conséquent les arêtes da, dc, dq sont cachées.

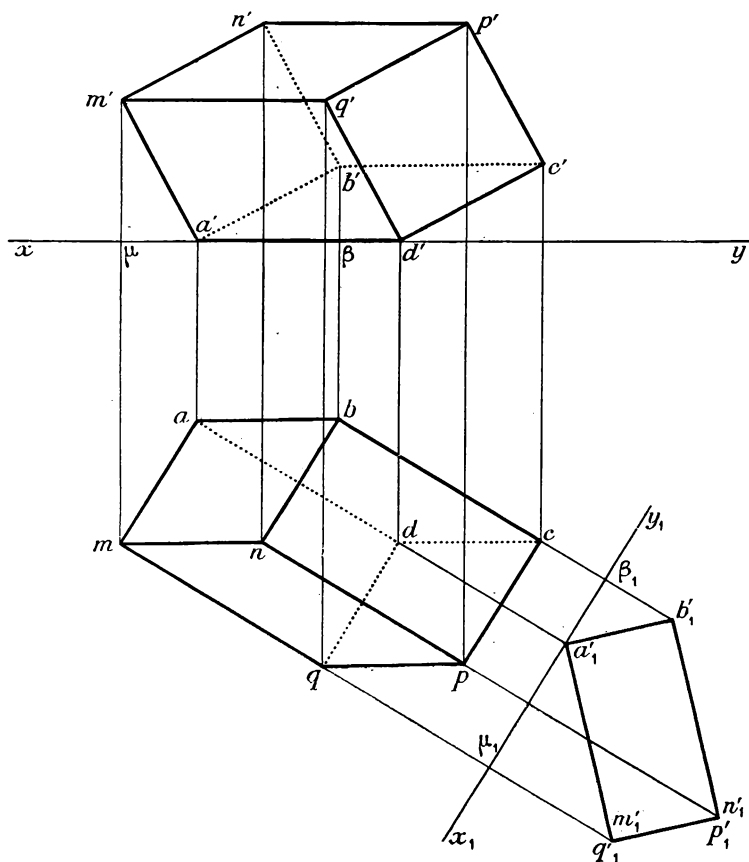


Fig. 227.

Le contour apparent frontal est $a'd'c'p'n'm'a'$ dont les arêtes sont vues. Les points de MQ ont des éloignements supérieurs à ceux de BN, donc $m'q'$ est vue et $n'b'$ est cachée. On en déduit que les arêtes $q'p'$ et $q'd'$ sont vues alors que $b'a'$ et $b'c'$ sont cachées.

3

TÉTRAÈDRE RÉGULIER ET CUBE

■ **108. Tétraèdre régulier.** — Un tétraèdre régulier est un tétraèdre dont les six arêtes sont égales. Les quatre faces sont des triangles équilatéraux égaux. L'existence d'un tel polyèdre et ses propriétés ont été établies dans le cours de *Géométrie*¹.

■ **109. Tétraèdre régulier dont une face est horizontale.** — Prenons le plan de la face considérée comme plan horizontal de projection et choisissons comme plan frontal de projection un plan perpendiculaire à une arête AB horizontale. Nous dessinons dans le plan horizontal de projection un triangle équilatéral abc (fig. 228) dont le côté ab est perpendiculaire à xy . Le quatrième sommet D, équidistant de A, B et C se projette horizontalement

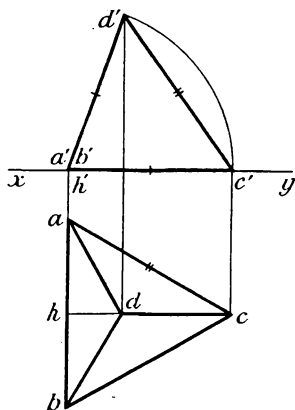


Fig. 228.

au centre d du cercle circonscrit au triangle abc . L'arête CD est frontale et sa projection frontale $c'd'$ a pour longueur le côté du triangle équilatéral abc . Donc d' se trouve sur la ligne de rappel de d et sur le cercle ayant pour centre c' et pour rayon la longueur des arêtes. On obtient deux points symétriques par rapport au plan horizontal de projection. Choisissons le point de cote positive.

En projection horizontale les six arêtes sont vues.

La projection frontale du tétraèdre est le triangle $b'c'd'$.

● **REMARQUE.** — La hauteur DH du triangle ABD est frontale et se projette frontalement en vraie grandeur suivant $d'h'$. Comme les hauteurs de triangles équilatéraux égaux sont égales, on a :

$$d'h' = hc = b'c'.$$

Le triangle $b'c'd'$, contour apparent frontal du tétraèdre régulier, est un triangle isocèle.

On aurait donc pu obtenir d' par l'intersection de la ligne de rappel de d et du cercle de centre h' et de rayon $h'c'$.

1. MAILLARD-MILLET, *Géométrie*, cl. de Première C. et M., p. 189.

■ 110. **Tétraèdre régulier ayant une arête de bout et l'arête opposée horizontale.** — Reprenons la figure 228. Nous savons qu'en faisant tourner la droite CD autour de l'axe de bout AB, il est possible de rendre CD horizontale (elle devient même parallèle à la ligne de terre). L'angle de rotation est l'angle $\alpha = \widehat{b'c'd'}$ (fig. 229).

Pour que la figure soit plus claire, nous avons fait subir à la nouvelle position du tétraèdre une translation parallèle à la ligne de terre. Nous obtenons alors les projections des sommets : (a_1, a'_1) , (b_1, b'_1) , (c_1, c'_1) , (d_1, d'_1) .

La projection frontale est un triangle isocèle : $b'_1d'_1 = b'_1c'_1$.

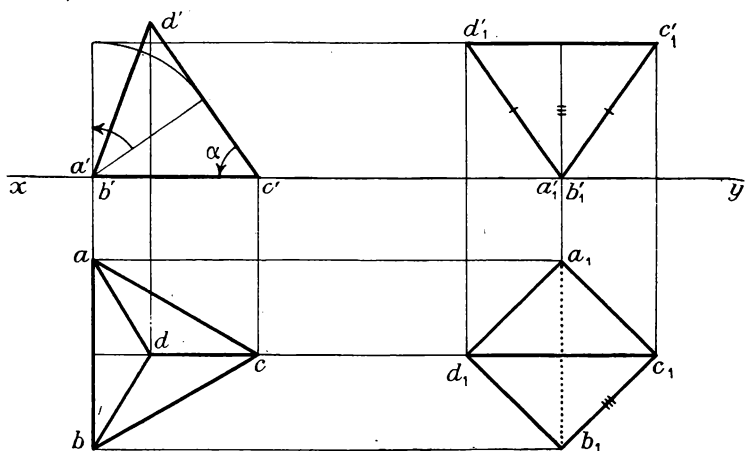


Fig. 229.

En projection horizontale, le contour apparent est le quadrilatère $a_1d_1b_1c_1$. Les diagonales a_1b_1 et c_1d_1 sont égales, se coupent en leur milieu et sont rectangulaires. C'est donc un carré. L'arête c_1d_1 est vue, l'arête a_1b_1 est cachée.

● REMARQUE. — On peut construire directement le tétraèdre régulier dans la position désirée sans passer par l'intermédiaire de la figure 228. En effet, on peut tracer la projection horizontale qui est un carré dont la diagonale est égale à la longueur l de l'arête du tétraèdre. Pour construire la projection frontale, il suffit de connaître la cote de l'arête CD. Cette cote est la plus courte distance des arêtes opposées AB et CD; c'est aussi la plus courte distance des arêtes opposées AD et BC, à savoir le côté $\frac{l\sqrt{2}}{2}$ du carré contour apparent en projection horizontale.

■ 111. **Cube.** — Un cube est un parallélépipède rectangle dont une base est un carré et dont la hauteur est égale au côté du carré.

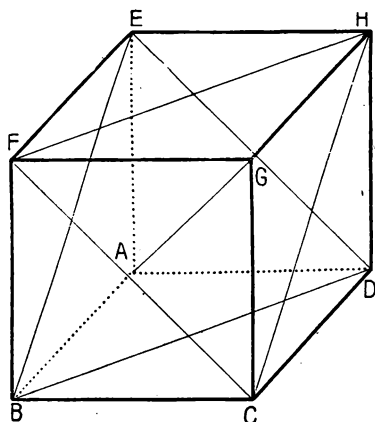


Fig. 230.

Toutes les faces sont des carrés. Les douze arêtes sont égales (fig. 230). L'existence d'un tel polyèdre et ses propriétés ont été établies dans le cours de *Géométrie*¹. Nous allons représenter un cube dans des positions simples.

■ 112. **Cube ayant une face horizontale et une diagonale frontale.** — La figure 231 représente, sans qu'il soit nécessaire de l'expliquer, les projections du cube ABCDEFGH dont la face ABCD est dans le plan horizontal de projection et la diagonale AG frontale.

La projection frontale se prête à des remarques géométriques.

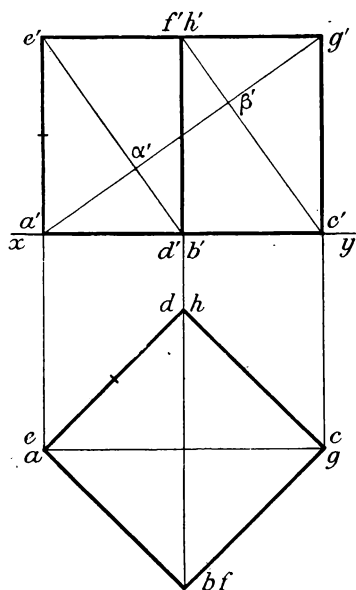


Fig. 231.

1° Le contour apparent $a'e'g'c'$ est un rectangle dont les côtés valent : $a'e' = l$; $a'c' = l\sqrt{2}$ en appelant l l'arête du cube. La diagonale AG, projetée frontalement en vraie grandeur, vaut donc : $AG = a'g' = l\sqrt{3}$.

2° Dans l'espace, les triangles BDE et CFH sont équilatéraux; ils sont égaux, la longueur commune de leurs côtés vaut $l\sqrt{2}$. Sur l'épure leurs plans sont de bout, les

traces frontales de ces plans sont respectivement $d'e'$ et

1. MAILLARD-MILLET, *Géométrie*, cl. de Première C. et M., p. 179; cl. de Mathématiques, p. 145.

$c'f'$. En outre, A est équidistant des points B, D, E puisque :
 $AB = AD = AE = l$.

On a aussi : $GB = GD = GE = l\sqrt{2}$.

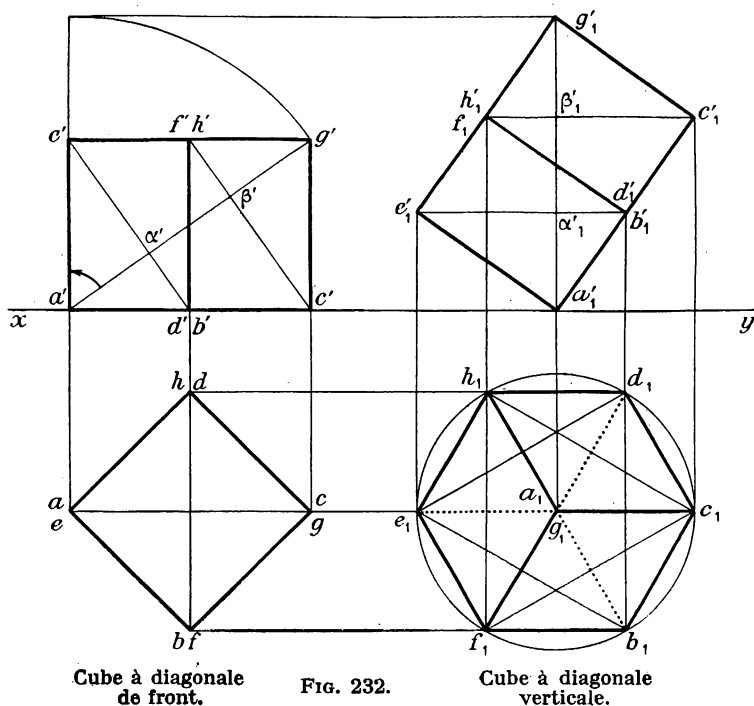
On en déduit que la diagonale AG est perpendiculaire au plan BDE qu'elle perce au centre du triangle équilatéral BDE. On établirait de même que la diagonale AG est perpendiculaire au plan CFH qu'elle perce au centre du triangle équilatéral CFH.

Il en résulte que sur l'épure, en projection frontale, les droites $d'e'$ et $c'f'$ sont perpendiculaires à $a'g'$ qu'elles coupent respectivement en α' et β' .

Enfin, l'examen du triangle $a'c'\beta'$ montre que la droite $d'e'$ parallèle à $c'\beta'$ et passant par d' milieu de $a'c'$ coupe $a'g'$ au milieu α' de $a'\beta'$. De même β' est le milieu de $a'g'$.

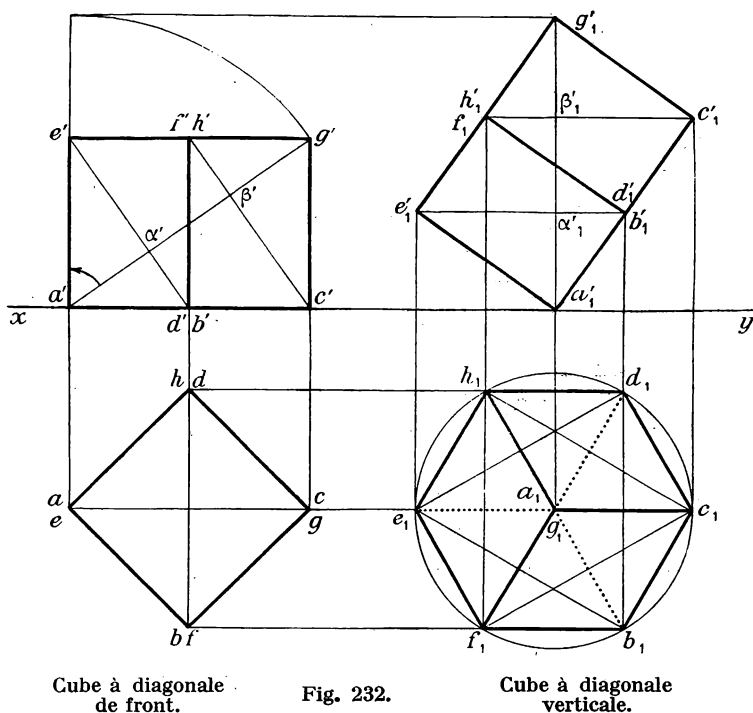
On a donc : $a'\alpha' = \alpha'\beta' = \beta'g'$.

■ 113. Cube ayant une diagonale verticale et une arête frontale. — Le cube étant représenté (fig. 231) dans la position où la diagonale AG est frontale, si nous lui faisons subir une rotation autour de l'axe de bout de A nous pourrions rendre AG verticale. Il suffit que l'angle de rotation soit l'angle $\widehat{g'a'e'}$ (fig. 232).



Pour que la figure soit plus claire, nous avons fait subir à la nouvelle position du cube une translation parallèle à la ligne de terre. Les projections horizontales se déduisent des projections frontales par lignes de rappel.

En projection frontale, le contour apparent est le rectangle $a'_1 e'_1 g'_1 c'_1$.



En projection horizontale, le contour apparent est l'hexagone $c_1 d_1 h_1 e_1 f_1 b_1 c_1$. Le point a_1 étant le point de plus petite cote, les trois arêtes $a_1 b_1$, $a_1 c_1$, $a_1 d_1$ issues de a_1 sont cachées. Le point g'_1 étant le point de plus grande cote, les trois arêtes $g_1 c_1$, $g_1 f_1$, $g_1 h_1$ issues de g_1 sont vues.

L'hexagone qui forme le contour apparent est régulier. En effet, les deux triangles $d_1 e_1 b_1$ et $c_1 f_1 h_1$ sont des triangles équilatéraux égaux de même centre puisque, dans l'espace, les triangles équilatéraux égaux DEB et CFH ont leurs centres sur AG.

● REMARQUE. — Il est possible de construire directement la figure 232 sans passer par l'intermédiaire de la figure 231.

En effet, connaissant l'arête l du cube, on peut tracer la diagonale AG verticale de longueur $AG = l\sqrt{3}$.

On construit ensuite la projection frontale du cube sachant que le contour apparent est un rectangle de diagonale $a'_1g'_1$ et que les projections orthogonales des autres sommets sur cette diagonale la partagent en trois parties égales.

Les projections horizontales s'en déduisent par lignes de rappel.

Le côté de l'hexagone régulier est : $l\sqrt{\frac{2}{3}}$.

EXERCICES

Construire les projections d'un tétraèdre régulier dans les cas suivants :

220. — Une arête AB est de bout et l'arête opposée CD est parallèle à la ligne de terre.

1° Faire tourner le tétraèdre de 45° autour de la perpendiculaire commune aux arêtes AB et CD. Représenter le tétraèdre dans sa nouvelle position.

2° Même question en faisant tourner de 30° .

221. — Une arête AB est verticale et une arête AC fait 30° avec le plan frontal de projection.

222. — On donne le centre (o, o') de la sphère circonscrite et une droite (d, d') , frontale, qui porte une arête.

223. — On donne une arête AB horizontale et la direction de la projection horizontale de l'arête AC.

Construire les projections d'un cube dans les cas suivants :

224. — Une diagonale AG est verticale, une arête AB est frontale.

Tracer la section du cube par le plan médiateur du segment AG et représenter la portion du cube située au-dessous de ce plan en supposant :

1° que le cube est solide et opaque;

2° que le cube est vide et réduit à sa surface latérale.

225. — Une diagonale AG est verticale, une arête AB est frontale.

Faire tourner le cube de 45° autour de AG et représenter le cube dans sa nouvelle position.

226. — On donne l'arête AB $(ab, a'b')$ et l'on sait que l'arête AC est frontale.

227. — On donne la diagonale AG $(ag, a'g')$ et l'on sait que l'arête AB est horizontale.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE V

228. — Construire les projections d'un tétraèdre connaissant une face ABC, horizontale, et les longueurs des arêtes AD, BD et CD.

229. — Construire les projections d'un tétraèdre connaissant une face ABC, frontale, et sachant que le trièdre opposé est trirectangle.

230. — Construire les projections d'un tétraèdre dont les arêtes opposées sont orthogonales, connaissant une face ABC, horizontale, et l'angle $\widehat{ADB}$.

231. — 1° Construire les projections d'une pyramide quadrangulaire connaissant son sommet S et sa base ABCD qui est un trapèze dans le plan horizontal de projection.

2° Faire passer par un point M donné de l'arête SA un plan coupant la pyramide suivant un parallélogramme.

232. — Construire les projections d'un prisme droit de hauteur donnée h , sachant que sa base dans le plan horizontal de projection est un hexagone régulier dont un côté fait 45° avec la ligne de terre.

233. — Construire les projections d'un parallélépipède dont trois arêtes, non situées deux à deux dans un même plan, sont portées par trois droites données; l'une est verticale, une autre est horizontale, la troisième est quelconque.

234. — 1° Construire les projections d'un prisme oblique dont les bases sont des triangles horizontaux et les arêtes latérales frontales.

2° Déterminer les projections d'une section droite.

235. — 1° Représenter un parallélépipède rectangle dont une face est dans le plan horizontal de projection et dont une diagonale est frontale.

2° Le faire tourner de manière à rendre cette diagonale verticale. Représenter le solide dans sa nouvelle position.

236. — Construire les projections d'un cube connaissant une diagonale frontale AG ($ag, a'g'$) et sachant que le plan frontal contenant AB est un plan de symétrie.

237. — On donne une verticale (d, d') et un point A (a, a'). Construire les projections d'un cube admettant A pour sommet et dont une diagonale est portée par la verticale donnée.

238. — 1° On donne un carré ABCD horizontal, les côtés parallèles BC et AD étant de bout. On porte sur la perpendiculaire à son plan menée par son centre O les segments $OE = OF = OA$. On joint E et F aux sommets du carré. On obtient ainsi deux pyramides régulières accolées par leur base commune et dont l'ensemble constitue un solide à huit faces.

Montrer que c'est un *octaèdre régulier* c'est-à-dire que les huit faces sont égales et que les huit angles polyèdres sont égaux.

Indiquer les symétries de ce polyèdre.

2° Faire tourner le solide autour de la droite de bout du sommet F pour amener la face FBC à être horizontale.

Représenter l'octaèdre dans sa nouvelle position.

Nature du contour apparent horizontal.

ÉPURES

Ombres. — Dans certaines épures, on demande de déterminer l'ombre propre d'un polyèdre et quelquefois l'ombre portée par ce polyèdre sur les plans de projection. Les rayons lumineux peuvent émaner d'un point fixe (ombres au flambeau) ou être parallèles à une direction fixe (ombres au soleil). (Voir n° 20.)

1° Ombre propre. — On détermine, parmi les faces vues, celles qui sont éclairées et celles qui sont dans l'ombre. La règle est la suivante :

→ Une face est obscure ou éclairée, sur une projection, suivant que le rayon lumineux qui aboutit à un point M de cette face est caché ou non par cette face, au voisinage du point M.

EXEMPLE. — Soit la face ABC et une direction (δ, δ') de rayon lumineux.

Considérons le rayon lumineux qui aboutit en M (m, m') de l'arête BC. La portion $m\alpha$ est cachée par la face, en projection horizontale (n° 53). Donc la face est obscure en projection horizontale.

La portion $m'\beta'$ est vue en projection frontale. Donc la face est éclairée en projection frontale.

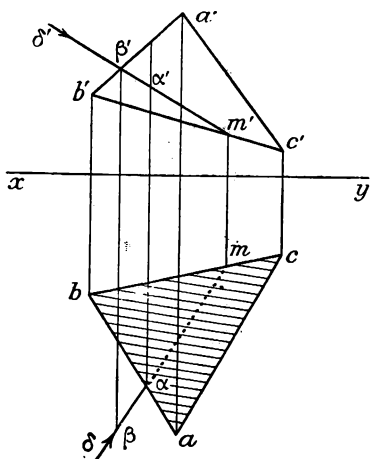


Fig. 232 bis.

2° Ombre portée sur un plan. — Les arêtes du polyèdre qui séparent une face éclairée et une face obscure sont appelées *arêtes mixtes*. L'ensemble des arêtes mixtes s'appelle la séparatrice. On établit alors que :

→ Le contour de l'ombre portée par un polyèdre sur un plan est l'ombre portée sur ce plan par la séparatrice.

239. — Un cube a une diagonale AG verticale.

$$A : x = 60; \quad y = -25; \quad z = 0.$$

$$G : x = 60; \quad y = -25; \quad z = 120.$$

L'arête AB est de front.

$$B : x = 60; \quad y > 0; \quad z = 40.$$

1° Représenter le cube.

2° Déterminer son ombre propre et l'ombre portée sur les plans de projection. Les rayons lumineux sont parallèles. Ils ont la direction et le sens du vecteur $\vec{GU}$.

$$U : x = 40; \quad y = -5; \quad z = 100.$$

240. — On donne un segment AB.

$$\begin{array}{lll} A : x = 40; & y = -60; & z = 0. \\ B : x = 40; & y = 0; & z = 0. \end{array}$$

1° Construire les projections d'un point C,

$$C : x = 100; \quad y = 40; \quad z > 0$$

de façon que le plan ABC fasse 45° avec le plan horizontal de projection.

Construire les projections des points D et E du plan ABC connaissant leurs projections horizontales.

$$\begin{array}{ll} d : x = 60; & y = -10 \\ e : x = 80; & y = -80. \end{array}$$

2° On considère le pentagone concave ABCDE. Il est la base d'une surface prismatique dont les arêtes sont frontales. L'arête du point A contient le point F.

$$F : x = 40; \quad y = 0; \quad z = 90.$$

On coupe cette surface prismatique par le plan de bout passant par F et par C.

On obtient ainsi un tronc de prisme.

Représenter la surface latérale de ce tronc de prisme.

241. — Un pilier a la forme d'un prisme droit vertical de hauteur 60. L'une de ses bases, dans le plan horizontal de projection, est le carré de centre I et dont un sommet est A.

$$\begin{array}{lll} I : x = 60; & y = 0; & z = 0. \\ A : x = 85; & y = 20; & z = 0. \end{array}$$

Il est surmonté d'un entablement ayant aussi la forme d'un prisme droit vertical de hauteur 20 et dont la base dans le plan horizontal $z = 60$ est un carré centré sur la verticale de I. Deux côtés de ce carré sont de bout. La longueur du côté du carré est 80.

1° Représenter le pilier surmonté de l'entablement.

2° Déterminer l'ombre propre du solide ainsi formé et son ombre portée sur les plans de projection. Les rayons lumineux sont parallèles. Ils ont la direction et le sens du vecteur $\overrightarrow{BA}$.

$$B : x = 110; \quad y = 10; \quad z = 10.$$

242. — On considère le quadrilatère convexe ABCD.

$$\begin{array}{lll} A : x = 10; & y = -30; & z = 50. \\ B : x = 30; & y = -30; & z = 10. \\ C : x = 70; & y = -30; & z = 30. \\ D : x = 50; & y = -30; & z = 70. \end{array}$$

1° Déterminer la nature de ce quadrilatère.

2° Ce quadrilatère est la section droite d'un prisme. Construire la section plane de ce prisme par le plan (P) défini comme suit. Le plan (P) coupe la ligne de terre au point situé sur Oy à 80 à gauche du grand axe. Sa trace horizontale passe par la projection horizontale c de C et sa trace frontale passe par la projection frontale d' de D.

3° Construire les projections du tronc de prisme, compris entre le plan (P) et le plan symétrique de (P) par rapport au plan de profil $y = 10$.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE COTÉE

CHAPITRE VI

LE POINT — LA DROITE

- 1. Épure du point.
- 2. Projection verticale auxiliaire.
- 3. Épure de la droite.
- 4. Problèmes sur la droite.

1

ÉPURE DU POINT

■ 114. **Principe de la géométrie cotée.** — Soit (H) un plan et M un point de l'espace (fig. 233) qui se projette orthogonalement sur (H) en m . Traçons une perpendiculaire au plan (H) sur laquelle nous choisissons un sens positif arbitraire Oz . Le point M est déterminé d'une manière unique, par la donnée de m et du nombre algébrique z qui mesure le segment mM parallèlement à Oz .

Ce nombre z est dite **cote** du point M : $z = mM$.

En pratique :

1° Le plan (H) est physiquement horizontal. On l'appelle **plan de comparaison**. Tous ses points ont une cote nulle et réciproquement.

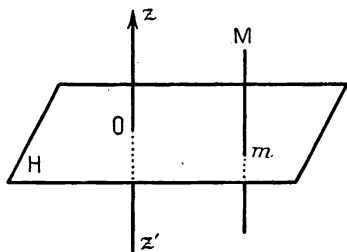


Fig. 233.

2° La normale au plan (H) est alors verticale et est *orientée positivement vers le haut*.

■ **115. Épure du point.** — Pour mesurer les cotes, il faut faire choix d'une *unité de longueur* qui doit être connue.

On peut la lier aux unités usuelles, mètre, centimètre... ou prendre pour unité un segment, arbitraire, mais donné.

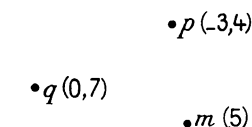


Fig. 234.

L'épure d'un point M se compose donc :

1° de la projection horizontale m du point;

2° de l'indication de la cote z de ce point, écrite, entre parenthèses, à côté du point m .

Ainsi (fig. 234), l'épure montre :

le point M, de cote 5, projeté en m ;

le point P, de cote — 3,4, projeté en p ;

le point Q, de cote 0,7, projeté en q .

Sur l'épure, on a représenté aussi l'unité de longueur choisie.

■ **116. Échelles.** — Les objets à représenter peuvent être trop grands pour que leur projection soit dessinée en vraie grandeur. On procède alors à une *réduction des longueurs* selon une proportion que l'on indique.

La nouvelle carte de France (représentation LAMBERT) est dressée au vingt-millième et au cinquante-millième.

Les fractions $\frac{1}{20\ 000}$ et $\frac{1}{50\ 000}$ sont appelées les *échelles numériques* du dessin.

A l'échelle de $\frac{1}{20\ 000}$, les dimensions réelles sont divisées par 20 000.

Une longueur d'un centimètre sur la carte correspond à une distance de 200 mètres sur le terrain.

L'échelle numérique étant connue, il est commode, pour éviter des calculs (parfois gênants, si l'échelle numérique est compliquée) de construire une *échelle graphique* sur laquelle on mesurera les longueurs prises directement sur l'épure.

Soit l'échelle numérique de $\frac{1}{20\,000}$.

L'hectomètre est représenté sur l'épure par une longueur de 5 millimètres. Portons alors sur une droite, à partir de 0, des segments consécutifs ayant pour longueur 5 mm et numérotions les points successifs 1, 2, 3, 4, 5... (fig. 235).

La distance qui sépare les points 0 et 3 représente, à l'échelle de $\frac{1}{20\,000}$ une longueur réelle de 300 m (fig. 235).

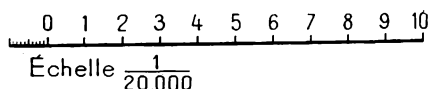


Fig. 235.

Pour faciliter les mesures en décimètres, on dessine ce que l'on appelle le *talon* de l'échelle : de l'autre côté de 0, on divise en dix parties égales un segment de 5 mm. Chaque division représente un décimètre.

Pour mesurer une longueur quelconque du dessin, on utilise un compas à pointes sèches dont on règle l'ouverture sur cette longueur.

On constate, par exemple, sur l'échelle que cette longueur correspond à une longueur réelle comprise entre 600 et 700 m. On place, alors, l'une des pointes du compas sur le point marqué 6, l'autre pointe tombe dans le talon de l'échelle et l'on évalue les décimètres supplémentaires.

Dans les questions pratiques, l'échelle est indispensable.

Dans les questions théoriques, certaines constructions peuvent se faire sans que l'échelle soit connue.

Dans les épures que nous dessinerons, nous n'indiquerons l'échelle que si nous en avons besoin et ce sera *toujours une échelle graphique*.

Il arrivera parfois que nous pourrions nous passer de l'échelle en construisant des longueurs proportionnelles aux cotes.

2

PROJECTION
VERTICALE
AUXILIAIRE

■ 117. **Passage de la géométrie cotée à la géométrie de Monge.** — Le plan (H) de comparaison étant qualifié *horizontal*, un plan (V) qui lui est perpendiculaire, est *vertical* (n° 30). La droite xy d'intersection de ces deux plans est la *ligne de terre* (fig. 236).

Un point A étant repéré, en géométrie cotée, par rapport à (H) nous nous proposons de le repérer, en géométrie de Monge, par rapport aux deux plans rectangulaires (H) et (V).

La projection horizontale est a . On sait que la projection frontale a' se trouve sur la ligne de rappel $\alpha\alpha$ obtenue en menant de a la perpendiculaire sur xy (n° 4) et que la longueur $\alpha a'$ est la distance de A au plan (H).

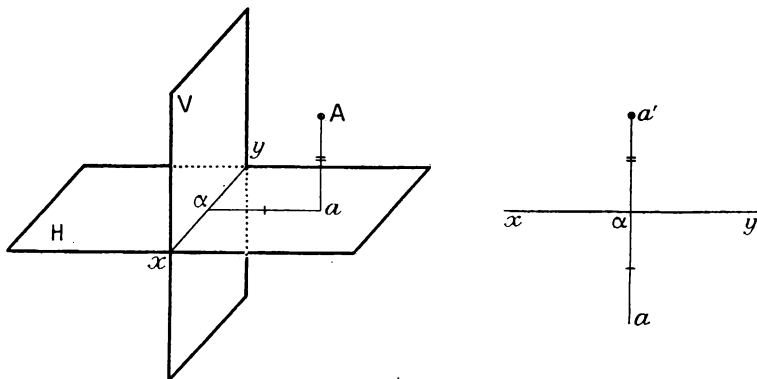


Fig. 236.

Convenons d'orienter, dans la géométrie de Monge, les perpendiculaires au plan (H) dans le même sens que les verticales de la géométrie cotée. Convenons aussi de prendre, dans les deux modes de représentation, la même unité de longueur.

On en déduit alors que le mot *cote* a la même signification. Par suite, avec les conventions de signe habituelles (n° 3), on a :

$$\overline{\alpha a'} = z.$$

En conservant la convention sur l'unité commune de longueur, on aurait pu orienter les verticales dans des sens opposés. Cela n'a aucune importance. Mais une fois que le choix a été fait pour un point, le choix est imposé pour les autres points de la figure.

■ 118. **Projection verticale auxiliaire.** — Le plan (V) est défini dès l'instant que l'on a tracé, sur l'épure, la ligne de terre xy . On dit que chercher les projections d'une figure dans la géométrie de Monge ainsi déterminée c'est faire une **projection verticale auxiliaire**.

Nous pouvons alors énoncer la règle suivante :

→ La projection verticale a' auxiliaire d'un point A, relativement à une ligne de terre xy , se trouve sur la ligne de rappel $a\alpha$ menée de la projection horizontale a de A, à une distance $\alpha a'$ de xy égale à la cote de A. Tous les points de cotes positives ont des projections verticales auxiliaires situées d'un même côté de xy .

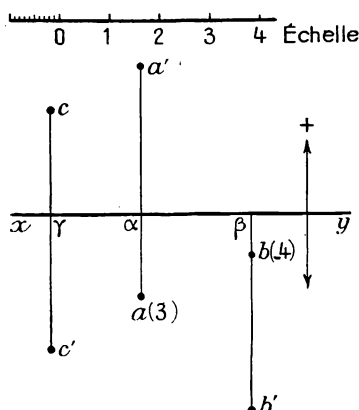


Fig. 237. — Projection verticale auxiliaire.

EXEMPLES. — Le point $a(3)$ a pour projection verticale auxiliaire a' :

$$\overline{\alpha a'} = +3.$$

Le point $b(-4)$ a pour projection auxiliaire b' :

$$\overline{\beta b'} = -4.$$

Inversement, le point dont les projections sont c et c' a pour cote $\gamma c'$ qui, mesurée sur l'échelle du dessin, est trouvée égale à $-2,7$, d'où le point $c(-2,7)$ (fig. 237).

■ 119. **Application.** — Il est commode d'utiliser une projection verticale auxiliaire pour obtenir en *vraie grandeur* une figure plane tracée dans un plan vertical. On pourra alors mesurer certaines dimensions et faire des constructions géométriques.

EXEMPLE. — On donne, dans un plan vertical, le triangle ABC : $a(0)$; $b(8)$; $c(3)$. Déterminer l'orthocentre (fig. 238).

En prenant pour ligne de terre xy la droite abc , on obtient la projection verticale auxiliaire $ab'c'$ du triangle.

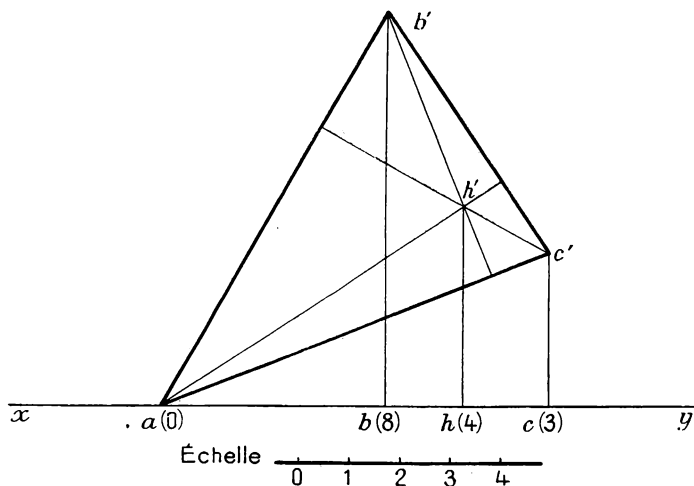


Fig. 238.

On construit l'orthocentre h' . On en déduit h par ligne de rappel. En mesurant hh' à l'échelle du dessin, on trouve $hh' = 4$. L'orthocentre du triangle est donc le point $h(4)$.

EXERCICES

NOTA. — Afin de préciser la position exacte des éléments géométriques des énoncés, nous supposons que l'on a tracé sur la feuille de papier deux axes rectangulaires Ox et Oy . L'unité graphique du dessin est un centimètre.

Un point M de l'espace sera donc défini :

1° par les coordonnées x et y de sa projection m sur le plan de comparaison matérialisé par la feuille de dessin;

2° par sa cote z .

243. — En prenant pour ligne de terre la droite dont l'équation, rapportée aux axes Ox et Oy est : $x + y - 4 = 0$, on demande de déterminer les projections verticales auxiliaires des points suivants :

$$A : x = 2; \quad y = 1; \quad z = 0.$$

$$B : x = 1; \quad y = 4; \quad z = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$C : x = 3; \quad y = 3; \quad z = \sqrt{2}.$$

244. — On donne les points A, B, C, D d'un même plan vertical.

$$A : x = 0; \quad y = 0; \quad z = 0.$$

$$B : x = 2; \quad y = 1; \quad z = -2,5.$$

$$C : \quad \quad y = 3,5; \quad z = 3.$$

$$D : \quad \quad y = 3; \quad z = 5.$$

Construire la vraie grandeur du quadrilatère $ABCD$.

3

ÉPURE
DE LA DROITE

■ **120. Détermination d'une droite.** — Une droite étant déterminée par deux de ses points A et B, cette droite sera définie par les projections cotées de deux de ses points.

EXEMPLE. — La figure 239 est l'épure de la droite qui joint le point $a(3,5)$ au point $b(7,8)$.

CAS PARTICULIERS : 1° Si une droite est *horizontale*, elle est parallèle au plan de comparaison. Tous ses points ont même cote. La figure 240 est l'épure de l'horizontale de cote 3. On indique $h(3)$.

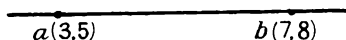


Fig. 239.
Droite quelconque.

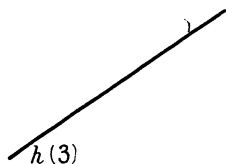


Fig. 240.
Horizontale.

• m

Fig. 241.
Verticale.

2° Si une droite est *verticale*, tous ses points ont même projection sur le plan de comparaison. La droite est définie par la projection d'un de ses points. La figure 241 est l'épure de la verticale du point M.

■ **121. Problème.** — Marquer, sur une droite donnée, un point de cote donnée.

Ce problème n'a d'intérêt que pour une droite qui n'est ni horizontale, ni verticale.

Soit à construire le point de cote 2,6 sur la droite joignant les points $a(1,8)$ et $b(3,2)$.

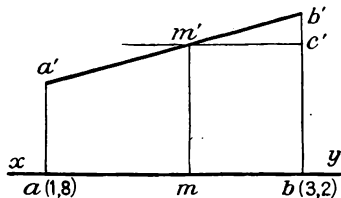


Fig. 242.

1° *Procédé graphique.* —

Faisons une projection verticale auxiliaire relativement à la ligne de terre xy confondue avec ab . Construisons des longueurs proportionnelles aux cotes, à l'aide d'un double décimètre :

$$\overline{aa'} = 1,8; \quad \overline{bb'} = 3,2 \text{ (fig. 242).}$$

Marquons sur bb' le point c' tel que : $\overline{bc'} = 2,6$ et menons par c' la parallèle à ab qui coupe $a'b'$ en m' . Rappelons m' en m sur ab . Nous avons ainsi construit le point de la droite AB qui a pour cote 2,6.

2° *Procédé algébrique.* — Appelons M, A, B les points de l'espace. D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{ma}}{\overline{mb}}.$$

Imaginons qu'on projette ces trois points orthogonalement sur une verticale quelconque en μ, α, β . On a encore :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{\mu\alpha}}{\overline{\mu\beta}} = \frac{1,8 - 2,6}{3,2 - 2,6} = -\frac{4}{3}.$$

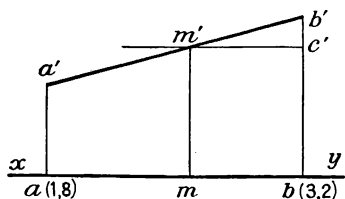


Fig. 242.

Donc : $\frac{\overline{ma}}{\overline{mb}} = -\frac{4}{3}.$

Le point m divise ab dans le rapport $-\frac{4}{3}$. Cette propriété permet de le construire.

En particulier, le milieu M de deux points A et B est tel que

$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -1$. Il se projette au milieu m du segment ab et, comme

l'on a aussi $\frac{\overline{\mu\alpha}}{\overline{\mu\beta}} = -1$ ou $\overline{\mu\alpha} + \overline{\mu\beta} = 0$, sa cote est la demi-somme des cotes de A et de B.

● **REMARQUE.** — En cherchant le point de cote zéro, on obtient la *trace* de la droite sur le plan de comparaison.

■ **122. Problème inverse.** — *Trouver la cote d'un point d'une droite connaissant sa projection horizontale.*

Soit la droite $a(1,2) b(2,8)$ et le point m (fig. 243).

1° *Procédé graphique.* — Effectuons une projection verticale auxiliaire en prenant la ligne de terre xy confondue avec ab . On obtient $a'b'$ en menant des longueurs aa' et bb' respectivement proportionnelles à 1,2 et à 2,8.

Le point m a pour projection frontale m' . On trouve que sa cote vaut $\overline{mm'}$ vaut $+5,2$.

2^o *Procédé algébrique.* — Désignons par z la cote de m . Avec les notations du n^o 121, on a :

$$\frac{\overline{ma}}{\overline{mb}} = \frac{\mu\alpha}{\mu\beta}.$$

On trouve, sur le dessin :

$$\frac{\overline{ma}}{\overline{mb}} = \frac{5}{3}.$$

On a : $\mu\alpha = 1,2 - z$

et $\mu\beta = 2,8 - z$.

On a donc l'équation :

$$\frac{1,2 - z}{2,8 - z} = \frac{5}{3}.$$

d'où l'on tire : $z = 5,2$.

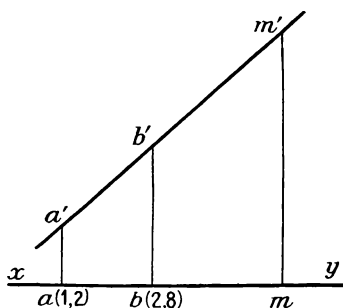


Fig. 243.

● REMARQUE. — Pour les problèmes n^{os} 121 et 122 l'échelle graphique est inutile.

■ 123. *Graduation d'une droite.* — *Graduer* une droite, c'est marquer sur elle des points de cotes entières successives (on dit aussi *cotes rondes*).

D'après le théorème de Thalès, ces points forment sur la projection de la droite des divisions égales (fig. 244).

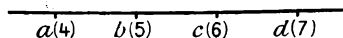


Fig. 244.

Le problème se ramène au problème traité au n^o 121 puisqu'il sera résolu quand on aura construit deux points de cotes rondes.

Lorsqu'une droite est graduée, la résolution des deux problèmes précédents est immédiate puisque la cote d'un point de la droite se lit sur la projection de la droite.

EXERCICES

245. — Deux points A et B étant donnés, trouver la projection et la cote du point M de la droite AB tel que $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k$, dans les cas suivants :

A : $x = 0$; $y = 1$; $z = 2,3$; B : $x = 2$; $y = 0$; $z = -4,9$; $k = -1$.

B : $x = 1$; $y = 3,2$; $z = -4$; B : $x = 2,8$; $y = 5$; $z = 6,3$; $k = -\frac{3}{4}$.

A : $x = 4$; $y = 2,7$; $z = 1$; B : $x = 1,9$; $y = 6,1$; $z = -7$; $k = -\frac{1}{2}$.

246. — Avec les données de l'exercice précédent, déterminer les points de la droite AB dont les cotes sont : $z = 0$; $z = 1,5$; $z = -3$.

247. — Avec les données de l'exercice n^o 245, calculer les cotes des points de la droite AB dont les projections ont pour abscisses : $x = 3$; $x = 4,2$; $x = 5$.

4

PROBLÈMES
SUR LA DROITE

■ 124. Distance de deux points. Angle d'une droite avec le plan de comparaison. — Soit A et B deux points donnés. Si la droite AB est *verticale*, la distance AB est donnée par l'échelle graphique.

Si la droite AB est *horizontale*, la distance AB est projetée en ab en vraie grandeur. On la mesure avec l'échelle graphique.

Dans le *cas général*, on remarque, qu'en faisant une projection verticale auxiliaire relativement à la ligne de terre xy confondue avec ab , la droite AB est frontale. On a vu (n° 19) que la distance des deux points est obtenue en vraie grandeur en projection frontale :

$$AB = a'b'$$

et que l'angle de la droite AB et du plan horizontal est l'angle aigu α de $a'b'$ et de ab (fig. 245).

Nous en avons déduit (n° 19) le résultat suivant :

→ La distance de deux points est égale à l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit la distance des projections horizontales des deux points et la valeur absolue de la différence de leurs cotes.

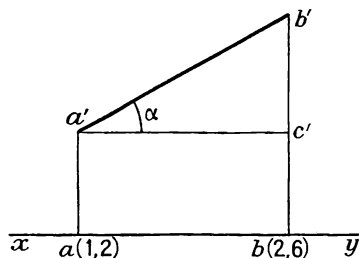


Fig. 245.

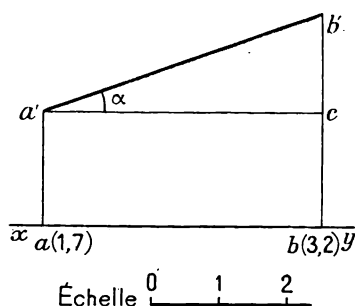


Fig. 246.

EXEMPLE. — On donne le segment AB joignant les points $a(1,7)$ et $b(3,2)$. Déterminer la distance AB et l'angle α que fait la droite AB avec le plan de comparaison (fig. 246).

1° *Procédé graphique.* — En faisant une projection verticale auxiliaire on trouve : $AB = a'b'$.

A l'échelle du dessin, on obtient : $AB = 4,4$.

L'angle α est indiqué sur la figure en $\widehat{b'a'c'} = \alpha$.

2° *Procédé algébrique.* — En utilisant la règle précédente, on a :

$$\overline{AB}^2 = \overline{ab}^2 + (3,2 - 1,7)^2 = \overline{ab}^2 + 2,25.$$

En mesurant ab , on trouve : $ab = 4,2$.

D'où : $\overline{AB}^2 = 17,64 + 2,25 = 19,89$; $AB = 4,4$ par défaut.

Le triangle rectangle $b'a'c'$ donne : $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b'c'}{a'c'} = \frac{3,2 - 1,7}{4,2} = \frac{5}{14}$.

On trouve : $\operatorname{tg} \alpha = 0,357$ par défaut.

Une table de valeurs naturelles fournit : $\alpha = 19^{\circ}40'$.

- **REMARQUE.** — Quand on part d'une donnée graphique ($a b$), il y a toujours une mesure à faire à l'aide de l'échelle. Dans ces conditions le *procédé graphique* est aussi précis que le *procédé algébrique* et il est plus rapide.

■ **125. Pente d'une droite. Intervalle.** — Nous rappelons¹ que l'on appelle *pente* d'une droite (D) relativement à un plan (P) la tangente de l'angle aigu que fait la droite (D) avec le plan (P). Nous dirons ici simplement : *pente*, étant sous-entendu que le plan (P) est le plan de comparaison.

La figure 245 montre que l'on a : $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b'c'}{a'c'} = \frac{b'c'}{ab}$.

La pente est un nombre qui ne peut pas se déterminer, en général, par une simple lecture sur une épure. Aussi utilise-t-on un élément qui se rattache à la pente et qui se lit facilement sur une épure.

Supposons que $b'c'$ soit égal à l'unité de longueur. La longueur ab est alors la mesure sur l'épure, à l'échelle graphique, de la distance qui sépare les projections de deux points dont les cotes diffèrent d'une unité. Ce nombre est dit l'*intervalle* de la droite.

Définition. On appelle *intervalle* d'une droite la mesure, à l'échelle graphique, de la distance qui sépare, sur l'épure, les projections de deux points de la droite dont les cotes diffèrent d'une unité.

Posons alors : $ab = i$

on a : $p = \operatorname{tg} \alpha = \frac{b'c'}{ab} = \frac{1}{ab} = \frac{1}{i}$.

Nous énoncerons :

→ La pente et l'intervalle sont *inverses*.

1. MAILLARD-MILLET, *Géométrie*, cl. de Première C. et M., p. 92.

■ 126. **Droites parallèles.** — Deux *verticales* sont parallèles.

Deux *horizontales* parallèles ont leurs projections parallèles (ou confondues). Inversement, deux horizontales dont les projections sont parallèles (ou confondues) sont parallèles dans l'espace puisque chacune d'elles est parallèle à sa projection.

Prenons le *cas général* et soit (D) et (Δ) deux droites parallèles. Leurs projections sont parallèles (ou confondues) puisque les plans projetants sont parallèles (ou confondus). Les droites (D) et (Δ) font des angles égaux avec (H); elles ont donc même pente et, par suite, même intervalle. Enfin, on s'élève sur elles en se déplaçant dans le même sens, donc les cotes croissent dans le même sens.

Comme par un point, on ne peut mener qu'une parallèle à une droite donnée, ces conditions sont suffisantes.

Théorème. — Pour que deux droites, non verticales, soient parallèles, il faut et il suffit que leurs projections horizontales soient parallèles ou confondues, que leurs intervalles soient égaux et que leurs cotes croissent dans le même sens.

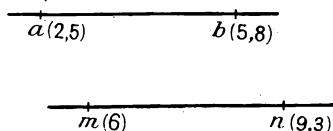


Fig. 247. — Droites parallèles.

EXEMPLE. — Mener par un point donné la parallèle à une droite donnée.

Soit à mener par m (6) la parallèle à la droite joignant a (2,5) et b (5,8). La différence des cotes de A et B est : $5,8 - 2,5 = 3,3$.

La parallèle cherchée est déterminée par le point m et le point n

de cote : $6 + 3,3 = 9,3$ tel que les vecteurs $\vec{ab}$ et $\vec{mn}$ soient équipollents (fig. 247).

■ 127. **Droites concourantes.** — Nous nous proposons de reconnaître si deux droites dessinées sur une épure sont concourantes et de trouver, le cas échéant, la projection et la cote de leur point commun.

1^{er} Cas : les deux droites ont même projection. — Elles sont situées dans un même plan vertical. Une projection verticale auxiliaire donnera leur point de rencontre et la cote de ce point.

EXEMPLE. — Déterminer le point commun aux droites a (1) b (4) et c (3) d (—1,2).

La figure 248 montre la projection verticale auxiliaire dont la ligne de terre est xy . On obtient $a'b'$ et $c'd'$ qui se coupent en m' , d'où on déduit m . On mesure la cote et on trouve m (2,25).

2^e Cas : les projections des deux droites se coupent en un point m . — On détermine la cote du point projeté en m sur chacune des droites (n° 122). Si l'on trouve la même cote, les droites se coupent. Sinon elles ne se coupent pas.

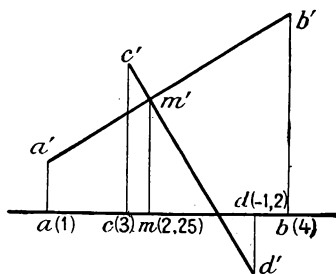


Fig. 248.

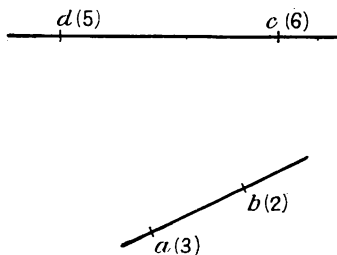


Fig. 249.

3^e Cas : les projections des deux droites ne se coupent pas dans les limites de l'épure. — Sur l'épure n° 249 on reconnaît tout de suite que le point commun aux projections des droites ne peut avoir même cote sur les deux droites.

L'examen de l'épure n° 250 ne nous permet pas de dire rapidement si les droites AB et CD sont concourantes. Comme au n° 18 (Exemple II) on cherchera les cotes des points projetés en m sur les droites AD et BC .

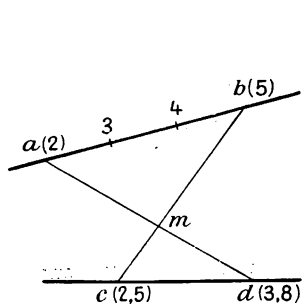


Fig. 250.

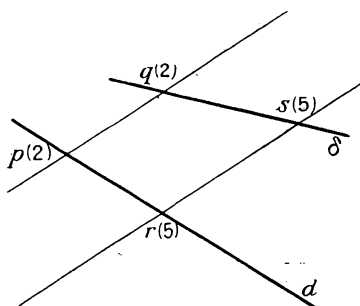


Fig. 251.

Sur l'épure n° 251 où l'on dispose de points de cotes rondes, on a choisi les projections pq et rs des deux horizontales de cotes 2 et 5 rencontrant les deux droites (D) et (Δ). Si (D) et (Δ) sont concourantes, elles déterminent un plan qui contient ces horizontales, celles-ci sont donc parallèles et il en est de même de leurs projections.

Réciproquement, si pq et rs sont parallèles, comme ce sont les projections d'horizontales, celles-ci sont parallèles, elles définissent un plan qui contient (D) et (Δ).

● **REMARQUE.** — Si l'une des droites est verticale, l'autre ne peut la rencontrer que si sa projection passe par le pied de la verticale.

EXERCICES

248. — On donne les points A : $x = 2$; $y = 3$; $z = 5,3$.

B : $x = 7$; $y = 2$; $z = 1,6$.

Déterminer la trace de la droite AB sur le plan de comparaison.

Calculer la distance AB et évaluer l'angle de AB et du plan de comparaison.

249. — Construire une horizontale, de cote donnée, rencontrant deux droites données.

250. — Graduer une droite connaissant sa projection horizontale d , son intervalle i , et la cote z d'un de ses points A dans les cas suivants :

1° Équation de d : $y = 1$; $i = \frac{3}{2}$; A : $x = 2$; $z = 6,4$.

2° Équation de d : $y = 2x - 3$; $i = \frac{10}{7}$; A : $x = 5$; $z = 9,2$.

3° Équation de d : $x = 2$; $i = 1$; A : $y = 0$; $z = 0$.

251. — Graduer la droite (D) qui passe par le point A connaissant sa projection d et sachant qu'elle rencontre une droite donnée (Δ). On donne :

A : $x = 3$; $y = 2$; $z = 1,7$.

d a pour équation : $2y + x - 7 = 0$.

(Δ) joint les points B : ($x = 1$; $y = 2$; $z = 0$)

et C : ($x = 5$; $y = 3$; $z = 4$).

252. — On donne une verticale (D), une droite quelconque (Δ) et un point A. Mener par A une droite qui rencontre (D) et (Δ) et graduer cette droite. On donne :

projection d de (D) : $x = 1$; $y = 2$.

A : $x = 0$; $y = 0$; $z = 5,3$.

(Δ) joint les points B : $x = 1$; $y = 3,5$; $z = 1$

et C : $x = 5$; $y = 0$; $z = -3$.

253. — Mener, par un point donné A, une droite de pente donnée p , rencontrant une horizontale donnée (D).

A : $x = 2$; $y = 1$; $z = 5$; $p = \frac{1}{3}$.

La droite (D), de cote zéro, est projetée en d d'équation : $y = 2,8$.

254. — Construire un parallélogramme connaissant le centre ω de cote 2,4 et les projections a et b de deux sommets consécutifs A et B de cotes respectives 1,6 et 3,5.

ω : $x = 0$; $y = 0$.

A : $x = 3$; $y = 1$.

B : $x = 1$; $y = 2$.

Déterminer les cotes des autres sommets.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE VI

255. — On donne la projection d'une droite, la projection cotée $a(2)$ d'un point de cette droite et sa pente $p = \sqrt{3}$.

Déterminer la cote d'un second point de la droite dont on donne la projection b . On prendra a b égal à deux centimètres : l'unité graphique est le centimètre :

256. — On donne le point $A : x = 3; y = 2; z = 0$.

1° Déterminer un point B dont on connaît la projection $b : x = 5; y = 3$ et sachant que la distance AB est égale à 5.

2° Nombre de solutions. Quelles sont les cotes des points obtenus?

257. — On donne deux projetantes Aa et Bb de longueurs respectives 2 et 3. Construire le lieu des points du plan de comparaison d'où on les voit sous le même angle.

258. — Construire la projection cotée d'un point C tel que le triangle ABC soit équilatéral, sachant que le plan du triangle est vertical et connaissant les projections cotées de A et de B .

259. — Graduer une droite définie par sa projection, la cote d'un de ses points et son angle avec le plan de comparaison.

260. — On donne les projections de deux points, la cote de l'un d'eux et la distance qui les sépare. Trouver la cote de l'autre.

261. — On considère un triangle ABC et un point S .

$$\begin{array}{lll} A : x = 2; & y = 1; & z = 2. \\ B : x = 4; & y = 2; & z = 3. \\ C : x = 4; & y = 3; & z = 4. \\ S : x = 3; & y = 5; & z = 6. \end{array}$$

1° Représenter la projection du triangle ABC que l'on suppose former une portion de plan opaque.

2° Déterminer son ombre portée sur le plan de comparaison, le point lumineux étant S .

3° Même question, les rayons lumineux étant parallèles et choisis de façon que le point A porte ombre en $\alpha : x = 0; y = 2$.

262. — On considère un triangle ABC rectangle en A et situé dans un plan vertical. On donne la projection cotée $a(1,6)$ $b(3,5)$ du côté AB (on prendra $ab = 4,2$). Construire la projection cotée de troisième sommet C de façon que la longueur AC soit égale à 6.

263. — Mener par deux points donnés, de même cote, deux droites parallèles sachant que leurs traces horizontales sont respectivement :

1° sur deux droites données dans le plan de comparaison;

2° sur une droite et un cercle donnés dans le plan de comparaison;

3° sur deux cercles donnés dans le plan de comparaison.

CHAPITRE VII

LE PLAN

- 1. *Représentation du plan.*
- 2. *Droites et plans parallèles.*
- 3. *Intersection de droites et de plans.*
- 4. *Applications.*
- 5. *Droites et plans perpendiculaires.*

1

REPRÉSENTATION DU PLAN

■ **128. Détermination d'un plan.** — Les raisonnements et les résultats du n° 22 sont applicables. Un plan peut être déterminé par :

- 1° deux droites concourantes ou parallèles;
- 2° trois points non alignés;
- 3° une droite et un point non situé sur la droite.

Il est toujours possible de définir un plan par deux droites concourantes.

■ **129. Plans particuliers.** — 1° Un plan *horizontal* est défini par la donnée de sa cote.

Par exemple, le plan horizontal de cote 6 est le lieu des points de cote 6. On pourra en construire autant de points que l'on voudra en se donnant leur projection horizontale.

Une figure quelconque d'un plan horizontal se projette horizontalement en vraie grandeur, réduite à l'échelle s'il y a lieu.

2° Un plan *vertical* est défini par sa trace sur le plan de comparaison. Tous les points du plan se projettent sur cette trace.

■ **130. Horizontales d'un plan.** — Les sections d'un plan (P) par des plans parallèles au plan de comparaison sont appelées des *horizontales* du plan (P).

Elles sont parallèles entre elles; leurs projections sont aussi

parallèles. On obtiendra de telles droites, en joignant des points du plan qui ont même cote.

La figure 252 montre le plan défini par les points $a(4)$ $b(0)$ $c(1)$. On a déterminé des points de cotes rondes sur AB et AC et l'on a tracé les horizontales de cotes 3 et 2, soit : $h(3)$ et $k(2)$.

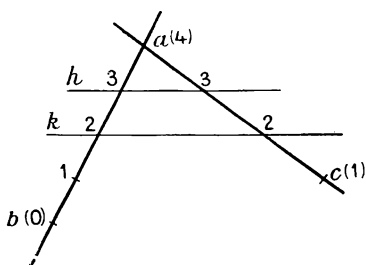


Fig. 252. — Horizontales d'un plan.

■ 131. **Échelle de pente.** — Rappelons que l'on appelle *ligne de pente* (P) relativement au plan horizontal (H) toute droite tracée dans (P) perpendiculairement aux horizontales de (P).

1° Les lignes de pente sont parallèles entre elles, leurs projections sont donc aussi parallèles.

2° Une horizontale et une ligne de pente sont les côtés d'un angle droit dont un côté (l'horizontale) est parallèle au plan de projection. Donc :

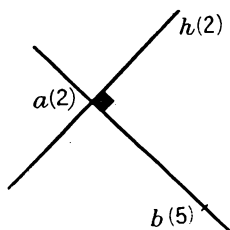


Fig. 253.

→ Les projections des horizontales et des lignes de pente d'un plan sont des droites perpendiculaires.

La figure 253 représente une horizontale $h(2)$ et une ligne de pente $a(2)$ $b(5)$.

3° Les lignes de pente sont, parmi toutes les droites du plan, celles qui ont la pente la plus grande. Cette pente est la *pente du plan* (P) relativement au plan (H), à savoir la tangente de l'angle aigu des deux plans.

Définition. On appelle *échelle de pente d'un plan* une ligne de pente graduée.

Il est d'usage de dessiner une échelle de pente d'un plan par deux droites parallèles très voisines ou par un trait renforcé. La graduation est marquée par de petits traits perpendiculaires à ces droites.

La figure 254 montre une échelle de pente d'un plan.

Il est clair qu'un plan donné a une infinité d'échelles de pente, parallèles entre elles.



Fig. 254.

Réciproquement, un plan est déterminé, d'une manière unique, par la donnée d'une échelle de pente. En effet, on connaît autant d'horizontales de ce plan que l'on veut.

Un plan vertical n'a pas d'échelle de pente. Il est défini par sa trace horizontale.

Un plan horizontal a pour ligne de pente une horizontale quelconque de son plan. Il n'a pas d'échelle de pente.

■ **132. Problème I.** — Construire une échelle de pente d'un plan.

Soit un plan (P) défini par deux droites concourantes $a(2)$ $b(5)$ et $a(2)$ $c(6)$ (fig. 255). On construit deux horizontales du plan : soit les horizontales $h(3)$ et $k(4)$. On mène une perpendiculaire à h et à k et l'on obtient une ligne de pente $d(3)$ $e(4)$. On en déduit l'échelle de pente P.

La connaissance de l'échelle de pente d'un plan permet de résoudre aisément certaines questions qui font l'objet des problèmes II et III.

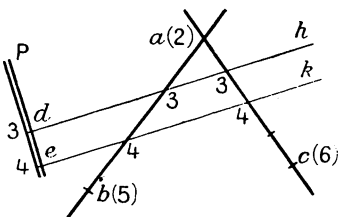


Fig. 255.

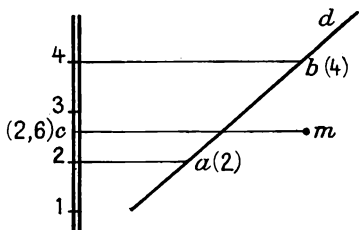


Fig. 256.

■ **133. Problème II.** — Déterminer la cote d'un point d'un plan connaissant sa projection.

Soit M un point du plan, projeté en m . L'horizontale passant par M est projetée suivant la perpendiculaire menée de m à l'échelle de pente du plan. L'horizontale et l'échelle de pente se coupent en un point C, projeté en c , dont on évalue la cote : on est ramené, pour cela, à trouver la cote d'un point situé sur une droite graduée (n° 122). Sur l'épure 256, on trouve $c(2,6)$. La cote du point M est : 2,6.

● **REMARQUE.** — La méthode suivie permettra de reconnaître si un point est au-dessus ou au-dessous d'un plan. Il suffira de comparer sa cote à celle du point du plan, qui a même projection que lui. On en déduira la *ponctuation* d'une épure (n° 51).

■ 134. **Problème III.** — *Connaissant la projection d'une droite du plan, la graduer.*

Sur l'épure 256, on a tracé une échelle de pente du plan (P) et la projection d d'une droite (D) de ce plan.

Les horizontales du plan, de cotes 2 et 4 rencontrent (D) en des points A et B projetés respectivement en a et b .

La droite $a(2) b(4)$ est alors graduée.

■ 135. **Angle d'un plan avec le plan horizontal. Pente.**

Intervalle. — D'après les résultats établis dans le cours de *Géométrie*¹, l'angle du plan avec le plan de comparaison est l'angle d'une ligne de pente avec ce plan.

La pente du plan est donc aussi la pente de la ligne de pente.

Définition. On appelle **intervalle** d'un plan l'intervalle d'une échelle de pente.

L'intervalle i d'un plan est relié à sa pente p et à l'angle α du plan et du plan de comparaison par les relations :

$$i = \frac{1}{p} = \cotg \alpha.$$

EXEMPLE. — *Evaluer i , p , α pour le plan dont l'échelle de pente P et l'échelle graphique sont tracées sur l'épure 257.*

A l'échelle du dessin on trouve : $i = ab = 2,7$.

On a donc : $\tg \alpha = p = \frac{1}{2,7} = 0,370$ par défaut.

Une table de valeurs naturelles donne : $\alpha = 20^\circ 19'$.

On peut mettre l'angle α en évidence graphiquement en portant sur l'horizontale du point b une longueur $bc = 1$.

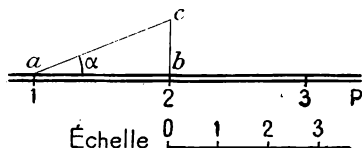


Fig. 257.

L'angle $\widehat{bac}$ est l'angle α puisque :

$$\cotg \alpha = \frac{ab}{bc} = ab = i.$$

Si le plan était défini par deux droites concourantes on construirait une ligne de pente.

1. MAILLARD-MILLET, *Géométrie*, Classes de Première C et M, p. 92.

■ 136. **Problème.** — Mener, dans un plan donné, par un point de ce plan, une droite faisant un angle donné β avec le plan de comparaison.

Soit un plan (P) défini par son échelle de pente et un point $a(3,6)$ de ce plan (fig. 258).

Déterminons l'intervalle de la droite cherchée : $i = \cotg \beta$.

Si l'angle β est donné par sa mesure, une table trigonométrique fournira le résultat, exprimé en unités de l'échelle graphique. Si l'angle β est donné par un angle dessiné sur l'épure, on construira la longueur i à l'aide d'un triangle rectangle OIJ rectangle en I et tel que :

$$IJ = 1; \widehat{IOJ} = \beta.$$

On obtient : $OI = i$.

Traçons l'horizontale du point a et l'horizontale dont la cote diffère d'une unité; par exemple, de cote : 2,6.

Le point de cote 2,6 de la droite cherchée se trouve donc :
sur l'horizontale de (P) de
cote 2,6

et sur le cercle de centre a
et de rayon i .

On obtient deux points :
 $b(2,6)$ et $c(2,6)$.

Les droites $a(3,6) b(2,6)$ et
 $a(3,6) c(2,6)$ répondent à la
question.

La construction n'est possible que si l'intervalle i est supérieur ou égal à l'intervalle i_1 du plan :

$$i \geq i_1.$$

Si α est l'angle du plan (P) et du plan de comparaison, on doit avoir :

$$\cotg \beta \geq \cotg \alpha \quad \text{ou :} \quad \beta \leq \alpha.$$

Ce résultat est conforme à la propriété de la ligne de pente qui est la droite du plan qui fait le plus grand angle avec le plan de comparaison.

On obtiendrait plus de précision dans le tracé en prenant l'intersection d'un cercle de centre a et de rayon ni (où n est un nombre entier) avec l'horizontale du plan dont la cote diffère de n de celle de a .

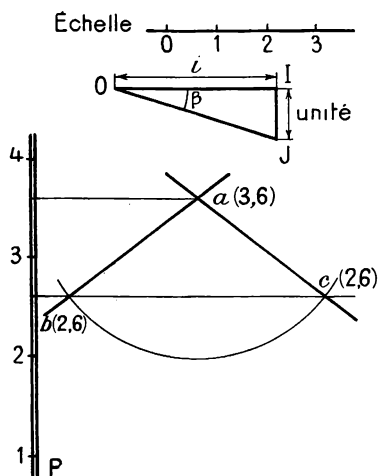


Fig. 258.

■ **137. Problème.** — Mener, par une droite donnée, un plan de pente donnée.

La figure 259 montre la droite $a(5) b(6)$ par laquelle nous voulons mener un plan de pente $p = \frac{2}{5}$.

Cherchons à déterminer l'échelle de pente $a(5) c(6)$ de ce plan. Si nous la connaissons, la droite bc serait la projection de l'horizontale de cote 6 du plan. L'angle

$\widehat{bca}$ est donc droit. D'autre part, la distance ac est l'intervalle i du plan. On a donc :

$$ac = i = \frac{1}{p} = \frac{5}{2}.$$

Le point c est donc sur le cercle de centre a et de rayon $\frac{5}{2}$ (mesuré à l'échelle graphique). Comme l'angle $\widehat{bca}$ est droit, le point c est le point de contact de ce cercle et d'une tangente issue de b .

Nous trouvons deux solutions c et d , donc deux échelles de pente : $a(5) c(6)$ et $a(5) d(6)$ qui définissent deux plans (P) et (Q) répondant à la question.

La construction n'est possible que si :

$$ab \geq ac; \quad \text{ou :} \quad \frac{1}{ab} \leq \frac{1}{ac}.$$

Cette condition exprime que la pente de la droite doit être inférieure ou égale à la pente du plan.

● **REMARQUE.** — Si la droite donnée est horizontale, l'échelle de pente lui est perpendiculaire et l'on connaît son intervalle qui est l'inverse de la pente donnée. La construction en résulte.

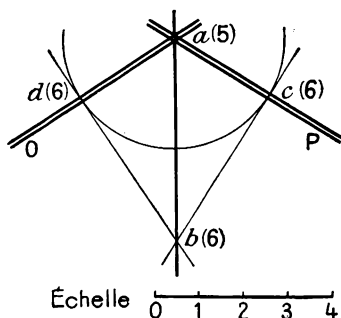


Fig. 259.

EXERCICES

264. — Un plan est défini par trois points $a(2)$, $b(4)$, $c(5)$. Construire sa trace sur le plan de comparaison.

265. — Connaissant les projections a, b, c, d des sommets d'un quadrilatère plan et les cotes de A, B, C, trouver la cote de D.

$$\begin{array}{ll} \text{A : } x = 2 & ; \quad y = 1; \quad z = 3,5; & \text{B : } x = 2,5; \quad y = 3; \quad z = 4,2; \\ \text{C : } x = 4,5; \quad y = 2; \quad z = 7 & ; \quad \text{D : } x = 4 & ; \quad y = 0; \quad z = ? \end{array}$$

2

DROITES ET PLANS PARALLÈLES

■ 138. **Droite parallèle à un plan.** — Pour qu'une droite soit parallèle à un plan, il faut et il suffit qu'elle soit parallèle à une droite du plan. Les solutions des problèmes, étudiés au n° 40 dans la géométrie de Monge, ne sont pas à modifier pour la géométrie cotée.

EXEMPLES. — I. *Mener, par une droite donnée AB, le plan parallèle à une autre droite donnée CD.*

Menons par A la parallèle AE à CD. Le plan cherché est le plan ABE. Le problème admet une solution si AB et CD ne sont pas parallèles.

Sur l'épure 260, on a mené par la droite $a(3) b(6)$ le plan parallèle à la droite $c(2) d(3)$ en construisant la parallèle $a(3) e(4)$ à la droite CD. En construisant les horizontales de cotes 4 et 5, on a obtenu l'échelle de pente.

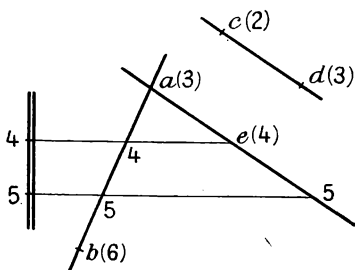


Fig. 260. — Plan mené par AB et parallèle à CD.

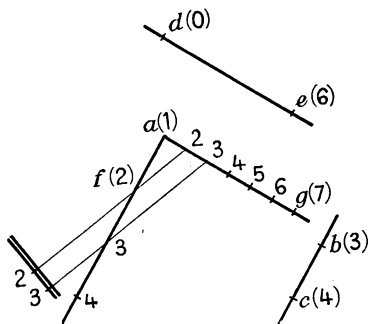


Fig. 261. — Plan mené par A et parallèle à BC et à DE.

II. *Mener, par un point donné A, le plan parallèle à deux droites, non parallèles, données BC et DE.*

Le plan est déterminé par les parallèles AF et AG menées par A respectivement aux droites BC et DE.

Sur l'épure 261, le plan cherché est le plan mené par $a(1)$ parallèle aux droites $b(3) c(4)$ et $d(0) e(6)$. On a construit les parallèles $a(1) f(2)$ et $a(1) g(7)$ aux deux droites données. Le plan AFG est le plan cherché. On a déterminé une échelle de pente à l'aide des horizontales de cotes 2 et 3.

Si les projections des deux droites données (non parallèles) sont parallèles (ou confondues), le plan construit sera un plan vertical.

■ **139. Plans parallèles.** — Quand deux plans sont parallèles, leurs horizontales sont parallèles. Si on mène un plan perpendiculaire à la direction commune de ces horizontales, ce plan coupe les deux premiers suivant des lignes de pente parallèles.

Réciproquement, si deux plans ont leurs lignes de pente parallèles, les horizontales de ces plans sont parallèles puisque leurs projections sont parallèles. Chaque plan est alors défini par deux droites de directions différentes parallèles à deux droites de l'autre plan. Les deux plans sont donc parallèles (ou exceptionnellement confondus).

→ Pour que deux plans soient parallèles, il faut et il suffit que leurs lignes de pente soient parallèles.

Il s'agit des lignes de pente considérées comme droites de l'espace et non seulement de leurs projections. Autrement dit :

→ Les projections des échelles de pente sont parallèles, les intervalles sont égaux et les cotes croissent dans le même sens.

Deux plans verticaux sont parallèles si leurs traces horizontales le sont et seulement dans ce cas. Deux plans horizontaux sont toujours parallèles.

EXEMPLE. — Mener, par un point donné A, le plan parallèle à un plan donné.

Soit à mener par le point $a(3,7)$ le plan parallèle au plan (P) défini par son échelle de pente (fig. 262).

Nous déterminerons ce plan par sa ligne de pente $a(3,7) b(1,7)$ parallèle à l'échelle du plan (P) (n° 126) et par l'horizontale ac de cote 3,7. Si l'on veut l'échelle de pente du plan, il suffira de graduer la droite $a(3,7) b(1,7)$.

Si le plan (P) est défini par deux droites concourantes (D) et (Δ), on mène par A deux parallèles respectives à (D) et (Δ) : elles déterminent le plan cherché.

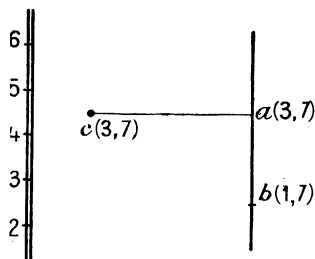


Fig. 262. — Plan mené par A et parallèle à un plan donné.

EXERCICES

266. — Mener, par une droite donnée, verticale, le plan parallèle à une droite donnée $a(1) b(5)$.

267. — Mener, par un point donné A, une droite, de pente donnée p , parallèle à un plan (P).

268. — Mener, par un point donné A, une droite parallèle à un plan donné (P), connaissant la projection d de cette droite.

3

INTERSECTION DE DROITES ET DE PLANS

■ 140. Intersection d'un plan (P) et d'un plan horizontal (H).

— L'intersection est l'horizontale du plan (P) dont la cote est égale à la cote commune de tous les points du plan (H).

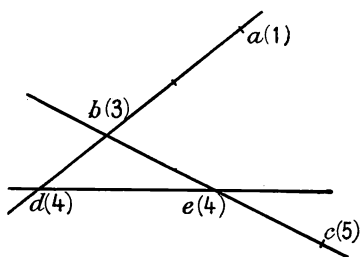


Fig. 263. — Intersection d'un plan et d'un plan horizontal.

EXEMPLE. — Intersection du plan $a(1) b(3) c(5)$ et du plan horizontal de cote 4.

Sur la droite ab nous marquons le point d de cote 4 (n° 121). Il suffit, ici, à cause de la simplicité des cotes, de prolonger ab de sa moitié bd (fig. 263). De même, nous marquons sur bc le point e de cote 4 : c'est le milieu de bc . La droite $d(4) e(4)$ est la droite cherchée.

Si le plan (P) est défini par son échelle de pente et si la cote de (H) est ronde, la solution est immédiate. Si la cote est quelconque, on marquera d'abord sur l'échelle de pente le point ayant cette cote (n° 121) et on en déduira aussitôt l'horizontale cherchée.

■ 141. Intersection d'un plan (P) et d'un plan vertical (V).

— L'intersection se projette suivant la trace du plan (V) et l'on est ramené à graduer une droite d'un plan, connaissant sa projection horizontale (n° 123).

La solution est immédiate si le plan (P) est défini par son échelle de pente car l'intersection se gradue en utilisant les horizontales du plan (P). On aura donc avantage à déterminer d'abord cette ligne de pente si elle n'est pas donnée par l'énoncé.

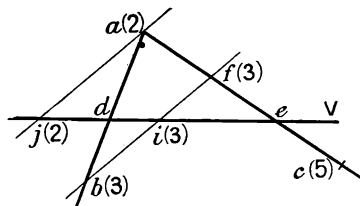


Fig. 264. — Intersection d'un plan et d'un plan vertical.

EXEMPLE. — Intersection du plan $a(2) b(3) c(5)$ et du plan vertical (V).
Traçons les droites ab et ac qui coupent V en d et e (fig. 264).

L'intersection cherchée est projetée suivant de . On pourrait relever la cote de d sur ab et celle de e sur ac (n° 122). Il est plus simple de tracer deux horizontales du plan.

L'horizontale de cote 3 joint le point $b(3)$ au point $f(3)$ de AC : on construit f en remarquant que $ac = 3 a/$. On en déduit l'horizontale de cote 2. Ces horizontales coupent respectivement de en $i(3)$ et $j(2)$. La droite d'intersection est $ij(3, 2)$.

Si les deux plans (P) et (V) sont verticaux et non parallèles, leur intersection est la verticale passant par le point de rencontre des traces des deux plans.

■ **142. Intersection de deux plans quelconques.** — La marche à suivre est la même qu'en géométrie de Monge. Nous rappelons brièvement la méthode en renvoyant, pour plus de détails, au n° 46.

Méthode générale. — Pour trouver un point commun à deux plan (P) et (Q), on coupe ces plans par un plan auxiliaire (R). Ce plan (R) coupe (P) suivant une droite (D) et il coupe (Q) suivant une droite (Δ). Si les droites (D) et (Δ), situées dans (R), sont sécantes en un point M, ce point M appartient aux plans (P) et (Q).

En répétant l'opération avec un second plan auxiliaire, on obtient un deuxième point de l'intersection.

Les plans auxiliaires sont, en général, horizontaux et quelquefois verticaux.

EXEMPLES. — I. *Intersection de deux plans définis par leurs échelles de pente dont les supports ont des projections non parallèles* (fig. 265).

En prenant pour plan auxiliaire le plan horizontal de cote 2, on obtient le point $a(2)$. Le plan horizontal de cote 5 conduit au point $b(5)$. L'intersection des plans (P) et (Q) est la droite $ab(2, 5)$.

II. *Intersection de deux plans définis par leurs échelles de pente dont les supports ont des projections parallèles.*

Les horizontales des deux plans (P) et (Q) sont alors parallèles. L'intersection des deux plans est donc une horizontale. Il suffit d'en trouver un point.

1^{re} Solution. — En prenant comme plan auxiliaire un plan vertical dont la trace xy est parallèle aux projections des lignes de pente,

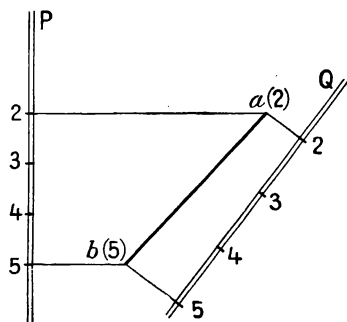


Fig. 265. — Intersection de deux plans quelconques.

on obtient une droite dans chaque plan. A l'aide d'une projection verticale auxiliaire on détermine le point d'intersection de ces deux droites.

Sur la figure 266, le plan (P) est coupé suivant la droite $a(0) b(3)$; le plan (Q) est coupé suivant la droite $c(0) d(4)$.

Il reste à trouver l'intersection de ces deux droites. Comme elles sont situées dans un plan vertical, nous utiliserons une projection verticale auxiliaire avec xy comme ligne de terre (n° 118). La droite $a(0) b(3)$ a pour projection frontale $a'b'$, la distance bb' étant égale à 3 unités. La droite $c(0) d(4)$ a pour projection frontale $c'd'$, la distance dd' valant 4 unités. On construit ainsi le point (m, m') commun aux deux droites. Sa cote est la mesure de la distance mm' soit, sur l'épure, environ 2,6.

L'intersection est l'horizontale (h) de cote 2,6.

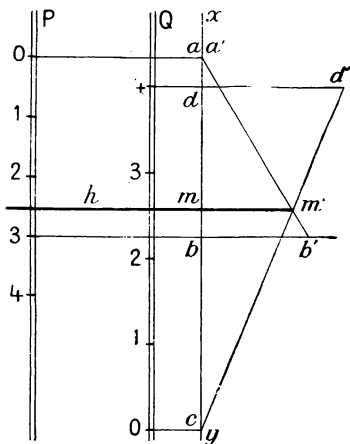


Fig. 266.

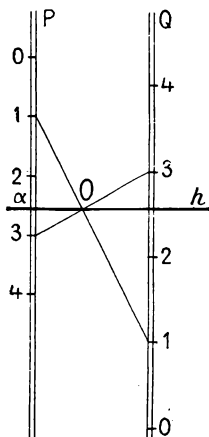


Fig. 267.

Intersection de deux plans
dont les lignes de pente ont des projections parallèles.

2^e Solution. — L'intersection cherchée (h) est, en projection, une droite perpendiculaire aux projections des échelles de pente et qui joint deux points de même cote. Or, si l'on considère les divisions marquées par les points de mêmes cotes rondes sur les projections de ces échelles de pente, ces divisions sont semblables et, comme les supports sont parallèles, elles sont homothétiques. Les droites joignant les points de même cote concourent au centre O d'homothétie. La droite h est la perpendiculaire menée de O sur P et Q. Pour avoir sa cote, il suffit de marquer le point α où cette droite coupe P par exemple. Sur l'épure 267 qui reproduit les données de l'épure 266, le point O a été construit en utilisant les points marqués 1 d'une part et les points marqués 3 d'autre part. La cote du point α est trouvée égale à 2,6 environ.

L'intersection est l'horizontale (h) de cote 2,6.

■ 143. **Intersection d'une droite et d'un plan.** — La marche à suivre est la même qu'en géométrie de Monge. Nous rappelons brièvement la méthode (n° 47).

Méthode générale. — Pour trouver le point commun à une droite (D) et à un plan (P), on fait passer par (D) un plan { auxiliaire (Q). Ce plan (Q) coupe (P) suivant une droite (Δ). Le point de rencontre M de (D) et de (Δ) est le point cherché.

Le plan auxiliaire passant par la droite (D) est, en général, arbitraire. On le définit par la direction de ses horizontales.

EXEMPLES. — I. *Intersection de la droite $a(3) b(5)$ et d'un plan défini par son échelle de pente P (fig. 268).*

Par la droite AB nous faisons passer un plan que nous définissons par la direction $b\beta$ de ses horizontales et nous cherchons l'intersection de ce plan avec le plan P. Les horizontales de cote 5 se coupent en c et celles de cote 3 en d . La droite cd coupe ab en m . Le point m est la projection du point cherché. Il reste à relever sa cote sur ab ou sur cd .

Le point d'intersection est le point $m(2,4)$.

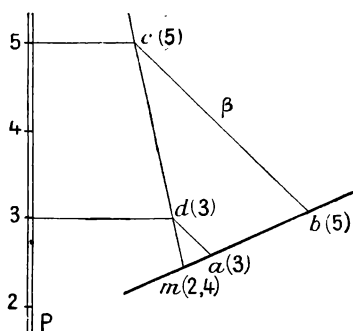


Fig. 268.

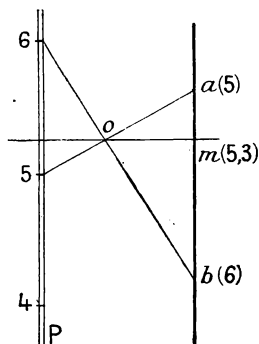


Fig. 269.

Intersection d'une droite et d'un plan.

II. *Intersection d'une droite et d'un plan, l'échelle de pente du plan et la droite ayant des projections parallèles.*

Bien que la méthode précédente soit applicable, il est commode, ici, de choisir pour plan auxiliaire le plan qui admet la droite donnée pour ligne de pente.

La figure 269 montre le plan P et la droite $a(5) b(6)$. Le plan dont l'échelle de pente est ab coupe P suivant une horizontale (n° 142, Exemple II) dont on a obtenu un point o en joignant les points de cote 6 et ceux de cote 5 de deux échelles de pente. Par o on mène la perpendiculaire aux échelles de pente, qui coupe ab en m . Le point m est la projection du point cherché; il reste à relever sa cote sur la droite ab par exemple. On trouve 5,3.

Le point d'intersection est le point $m(5,3)$.

● **CAS PARTICULIER.** — 1° Si la droite est verticale, sa projection est un point a et l'on est ramené à trouver la cote d'un point d'un plan connaissant sa projection (n° 133).

2° Si le plan est vertical, le point d'intersection de ce plan avec une droite a pour projection le point de rencontre de la trace du plan avec la projection de la droite. On est ramené à trouver la cote d'un point d'une droite connaissant sa projection (n° 122).

■ 144. Utilisation d'une projection verticale auxiliaire.

— Les constructions qui ont été faites dans l'étude de l'intersection de droites et de plans ont été facilitées par la simplicité des cotes. Avec des cotes quelconques, les problèmes conduisent à des constructions souvent pénibles. Il est plus rapide alors de prendre un plan vertical comme plan frontal de projection et de résoudre, par la géométrie de Monge, le problème posé.

EXERCICES

269. — Déterminer l'intersection de deux plans. L'un est défini par un point O (5) et une horizontale h (2). L'autre est défini par le point O (5) et une droite quelconque a (1) b (4).

270. — On donne un plan (P) par son échelle de pente.

1° Tracer, dans le plan (P), une droite (D) dont on donne la projection d . Graduer la droite.

2° On donne, d'autre part, une droite quelconque a (2) b (3). Mener par AB un plan (Q) qui coupe (P) suivant une parallèle à (D).

271. — 1° On donne une horizontale h (0). Mener, par cette droite, un plan (P) de pente $\frac{1}{2}$. Combien y a-t-il de solutions?

2° On donne une autre horizontale k (0). Mener, par cette droite, un plan (Q) de pente $\frac{1}{2}$.

3° Construire l'intersection d'un plan (P) et d'un plan (Q).

272. — Construire l'intersection de deux plans dont les projections des échelles de pente sont parallèles en cherchant le point de rencontre d'une ligne de pente de l'un avec l'autre.

273. — On donne deux plans (P) et (Q) par leurs échelles de pente. Les données sont telles que les horizontales de cote 1 ainsi que les horizontales de cote 2 se coupent en dehors des limites de l'épure. Montrer que l'on peut obtenir l'intersection des deux plans en opérant de la façon suivante : On fait passer par la ligne de pente du plan (P) un plan quelconque (R) que l'on définit par la direction de ses horizontales. L'intersection des plans (Q) et (R) coupe la ligne de pente de (P) en un point de la droite cherchée. Répéter l'opération à partir de l'échelle de pente du plan (Q). Graduer la droite obtenue.

4

APPLICATIONS

Nous allons traiter, en géométrie cotée, les trois problèmes qui ont été posés et résolus aux n^{os} 48, 49, 50. Nous ne reprendrons pas les solutions géométriques et traiterons seulement des exemples.

■ 145. **Problème I.** — *Mener, par un point donné, une droite rencontrant deux droites données.*

Les données sont dessinées sur l'épure 270 : il s'agit de mener par le point o (3) une droite rencontrant les droites a (2) b (3) et c (5) d (6). La droite cherchée est l'intersection des plans OAB et OCD .

Du plan OAB on connaît l'horizontale de cote 3. On construit facilement l'horizontale ef de cote 4.

De même on construit l'horizontale de cote 4 du plan OCD : il suffit de prendre le milieu h de oc et de le joindre au point g (4) de la droite CD .

Les deux horizontales ef et gh se coupent en p (4).

La droite cherchée est op (4). Elle coupe ab en m et cd en n . Les cotes de ces points restent à déterminer. La vérification des tracés réside dans le fait que la cote de m relevée sur ab doit être égale à la cote relevée sur op . Il en est de même pour le point n considéré comme étant situé sur cd et sur op .

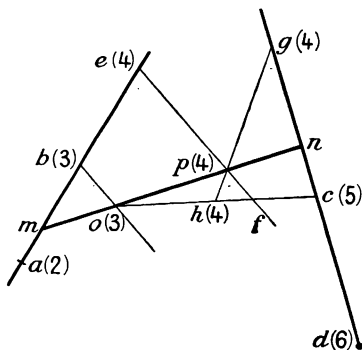


Fig. 270. — Droite passant par O et rencontrant AB et CD .

● **REMARQUE.** — Nous n'utilisons pas ici la deuxième construction du n^o 48 qui consisterait à chercher l'intersection de la droite CD avec le plan OAB ; elle exigerait l'emploi d'un plan auxiliaire qu'il n'est pas avantageux ici de prendre vertical. Dès lors, il est aussi simple de prendre le plan OCD .

■ 146. **Problème II.** — *Mener une droite parallèle à une droite donnée et rencontrant deux droites données.*

Les données sont dessinées sur l'épure 271 : il s'agit de mener une droite parallèle à la droite $p(7)q(8)$ et rencontrant les droites $a(2)b(3)$ et $c(4)d(5)$.

La droite cherchée est l'intersection des plans menés par AB et CD parallèlement à PQ .

Nous déterminons le plan mené par AB parallèlement à PQ par la droite $a(2)e(3)$, le vecteur $\vec{ae}$ étant équipollent au vecteur $\vec{pq}$. On a ainsi suivant be l'horizontale de cote 3 de ce plan.

Sur cd nous marquons le point $g(3)$ et par c nous menons $\vec{cf}$ équipollent à $\vec{qp}$. Le point f est donc coté 3 et le plan CDF est le

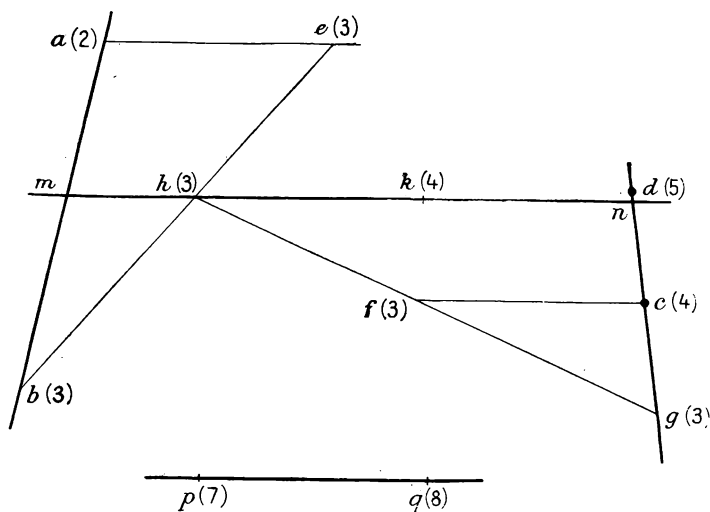


Fig. 271. — Droite parallèle à PQ et rencontrant AB et CD .

plan mené par CD parallèlement à PQ . On a alors suivant gf l'horizontale de cote 3 de ce plan.

Les deux horizontales bc et gf se coupent au point $h(3)$.

En menant par h le vecteur $\vec{hk}$ équipollent à $\vec{pq}$, on obtient la droite $h(3)k(4)$ qui est la droite cherchée.

Elle coupe ab en m et cd en n . Il reste à relever les cotes de ces points et à vérifier les tracés comme on l'a expliqué au n° 145.

■ 147. **Problème III.** — *Mener, par un point donné, une droite parallèle à un plan donné et rencontrant une droite donnée.*

Les données sont dessinées sur l'épure 272 : il s'agit de mener par $a(1)$ une droite parallèle à un plan (P) défini par son échelle de pente et rencontrant la droite $b(2) c(3)$.

La droite cherchée joint le point A au point M où la droite BC perçoit le plan (Q) mené par A parallèlement à (P).

Le plan (Q) est défini par sa ligne de pente. On a tracé celle qui passe par a . Son intervalle est égal à l'intervalle de (P).

L'intersection de (Q) et de BC a été obtenue en menant par BC un plan auxiliaire (R) déterminé par la direction de ses horizontales. Les horizontales de cotes 2 des plans (Q) et (R) se coupent en $d(2)$. Les horizontales de cotes 3 se coupent en $e(3)$. Les plans (Q) et (R) se coupent suivant $d(2) e(3)$. La droite de rencontre bc en m .

Il reste à déterminer la cote de m en relevant sur bc ou sur ed . On trouve : 2,5.

La droite cherchée est la droite $a(1) m(2,5)$.

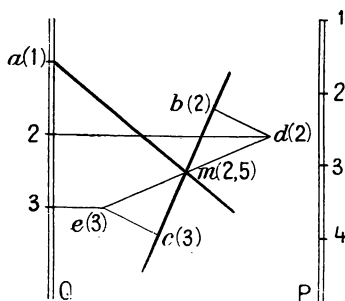


Fig. 272. — Droite, passant par A, parallèle au plan (P) et rencontrant BC.

EXERCICES

274. — Mener par un point $a(5)$ une droite rencontrant une horizontale $h(2)$ et une droite quelconque $b(3) c(4)$.

275. — Mener une verticale rencontrant deux droites données.

276. — Mener une droite parallèle à une droite donnée, $a(0) b(3)$ s'appuyant sur une verticale donnée (D) et sur une horizontale donnée $h(4)$.

277. — Mener, par un point donné $a(1)$, une horizontale rencontrant une droite donnée $b(0) c(4)$.

278. — Mener, par un point $a(7)$, une droite rencontrant deux horizontales données de cotes respectives 1 et 4.

279. — Mener par la droite AB un plan faisant 60° avec le plan de comparaison.

A : $x = 2$; $y = 1$; $z = 0$; B : $x = 4$; $y = 5$; $z = 5$.

280. — Mener par une horizontale $h(2)$ un plan faisant 30° avec le plan de comparaison.

281. — Mener, par un point donné $a(5)$, un plan faisant 45° avec le plan de comparaison et dont la trace dans le plan de comparaison passe par un point donné $b(0)$.

282. — Construire l'échelle de pente d'un plan passant par un point donné et parallèle à deux droites données.

Nous énoncerons :

Théorème. — Pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan, il faut et il suffit que la droite et l'échelle de pente du plan aient :

- 1° des projections parallèles (ou confondues);
- 2° des intervalles inverses;
- 3° des graduations croissant en sens contraires.

■ 149. **Problème I.** — *Mener, par un point donné, la perpendiculaire à un plan donné.*

Soit à mener par le point $a(3)$ la perpendiculaire au plan (P) défini par son échelle de pente $b(0) c(1)$ (fig. 274). Nous ferons une projection verticale auxiliaire en prenant une ligne de terre xy confondue avec bc . La projection frontale b' de $b(0)$ est confondue avec b et la projection frontale c' de $c(1)$ est telle que cc' est égale à l'unité graphique. Le plan devient de bout, sa trace frontale est $b'c'$. La projection frontale a' de $a(3)$ est telle que $\alpha\alpha' = 3$ unités graphiques.

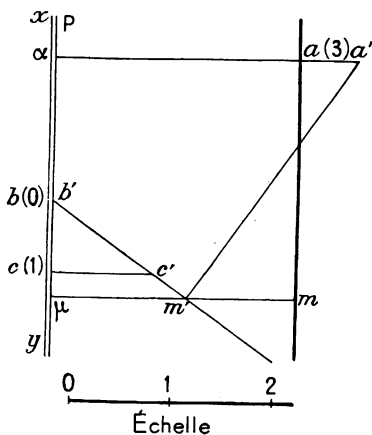


Fig. 274. — Perpendiculaire menée du point A à un plan (P).

La perpendiculaire au plan est la frontale ($am, a'm'$).

En évaluant la cote du point m' , on trouve $\mu m' = 1,3$.

La perpendiculaire cherchée est la droite $a(3) m(1,3)$.

La distance du point au plan est la longueur du segment $a'm'$ mesurée à l'échelle graphique. On trouve $a'm' = 2,9$.

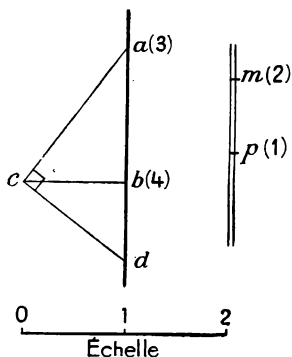


Fig. 275. — Plan mené par un point M perpendiculaire à une droite AB.

■ 150. **Problème II.** — *Mener, par un point donné, le plan perpendiculaire à une droite donnée.*

Soit à mener, par le point $m(2)$, le plan perpendiculaire à la droite $a(3) b(4)$ (fig. 275). Le plan cherché

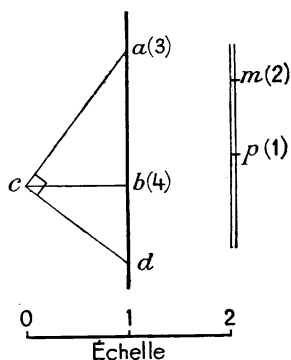


Fig. 275. — Plan mené par un point M perpendiculaire à une droite AB.

a son échelle de pente mp parallèle à ab ; son intervalle est l'inverse de l'intervalle de la droite. On l'obtient en réalisant le triangle acd , rectangle en c , tel que $bc = 1$ unité graphique. L'intervalle cherché est bd . On le porte suivant mp en sens contraire de la droite. L'échelle de pente du plan (P) est $m(2)p(1)$.

En cherchant l'intersection de la droite $a(3)b(4)$ et du plan ainsi construit, on aurait le pied de la perpendiculaire abaissée de $m(2)$ sur la droite.

■ **151. Plans perpendiculaires.** — Pour que deux plans soient perpendiculaires, il faut et il suffit que l'un d'eux contienne une droite perpendiculaire à l'autre.

EXEMPLE. — Mener par la droite $a(2)b(4)$ le plan perpendiculaire à un plan donné par son échelle de pente (P) (fig. 276).

Le plan cherché est déterminé par la droite AB et par la perpendiculaire BC menée de B sur le plan (P). On a construit le point $c(3)$ ainsi qu'il a été expliqué au n° 148.

La projection orthogonale de AB sur le plan (P) est l'intersection de (P) et du plan ABC. Sur l'épure on a utilisé comme plans auxiliaires les plans horizontaux de cotes 2 et 3 et l'on a obtenu la droite $d(2)e(3)$.

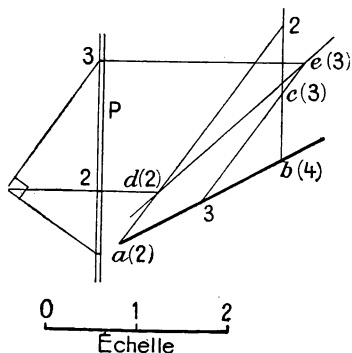


Fig. 276. — Plan mené par AB et perpendiculaire au plan P.

■ **152. Perpendiculaire commune à deux droites.** — La marche à suivre est la même qu'en géométrie de Monge (n° 61). Rappelons seulement les deux étapes de la solution :

1° la *direction* de la perpendiculaire commune (c'est la direction de la perpendiculaire à un plan parallèle aux deux droites);

2° la *position* de la perpendiculaire commune (on est ramené au problème n° 146).

La *plus courte distance* est la distance des *pieds* de la perpendiculaire commune. Mais on peut trouver cette plus courte distance sans construire la perpendiculaire commune : il suffit de déterminer la distance d'un point de l'une des droites au plan mené par l'autre parallèlement à la première.

EXEMPLES. — I. Les deux droites sont horizontales.

Soit les horizontales h (3,4) et k (5,1) de la figure 277. La perpendiculaire commune est la verticale qui les rencontre; elle passe par le point o commun aux projections h et k .

La plus courte distance est la différence des cotes des deux droites; c'est donc : $5,1 - 3,4 = 1,7$.

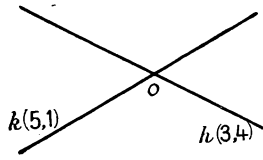


Fig. 277. — Perpendiculaire commune à deux horizontales.

II. L'une des droites est verticale.

Sur l'épure de la figure 278, l'une des droites est la verticale de pied o et l'autre est la droite a (2) b (6). La perpendiculaire commune est une horizontale dont la projection est la perpendiculaire om menée de o sur ab . Pour achever de la déterminer il faut trouver la cote qui est celle de m de la droite ab . On trouve m (3,7).

La perpendiculaire commune est l'horizontale h (3,7).

La plus courte distance est la longueur om mesurée à l'échelle graphique : $om = 2,8$.

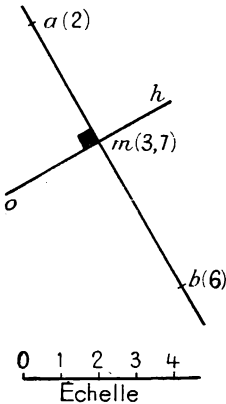


Fig. 278. — Perpendiculaire commune d'une verticale et d'une droite quelconque.

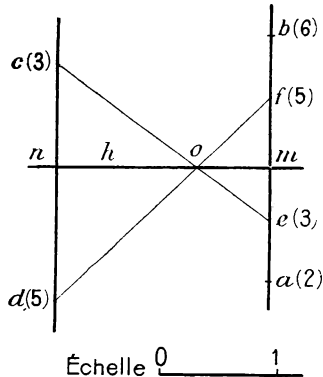


Fig. 279. — Perpendiculaire commune de deux droites, dont les projections sont parallèles.

III. Les deux droites ont leurs projections parallèles.

Soit les droites a (2) b (6) et c (3) d (5) dont les projections sont parallèles (fig. 279). Tout plan parallèle aux deux droites est vertical. La perpendiculaire commune est horizontale et sa projection est perpendiculaire aux projections des droites. C'est donc l'intersection des deux plans dont les échelles de pente sont a (2) b (6) et c (3) d (5). On a donc marqué (n° 142) sur ab les points e (3) et f (5). Les droites ce et df se coupent en o et, par o , on a mené la perpendiculaire (h) à ab et à cd . La droite (h) coupe ab en m et coupe cd en n . La droite cherchée est l'horizontale projetée suivant (h). Sa cote est celle

de m sur ab ou de n sur cd . L'égalité de ces cotes est une vérification des tracés. On trouve que :

la perpendiculaire commune est l'horizontale h (3,7).

La plus courte distance est la longueur mn mesurée sur l'échelle graphique. On trouve : $mn = 1,8$.

IV. Cas général.

Soit les droites a (4) b (5) et c (4) d (7) de la figure 280. On détermine d'abord le plan passant par AB et parallèle à CD en menant par b (5) la parallèle b (5) e (4) à CD . En traçant les horizontales de cotes 4 et 5 de ce plan, on obtient l'intervalle $bf = i$ de ce plan.

On détermine l'intervalle i' de la perpendiculaire commune : la construction est faite sur l'épure en portant $bg = 1$ sur la parallèle à ae et menant gk perpendiculaire en g à fg . On a : $i' = bk$.

Enfin, la projection de la perpendiculaire commune est perpendiculaire à la direction a (4) e (4). On obtient la direction : b (5) k (4). Il faut maintenant mener une droite parallèle à BK et rencontrant les droites AB et CD . Pour cela, nous traçons par b (5) de AB et par l (5) de CD les parallèles à BK . Nous obtenons deux plans dont l'intersection est la perpendiculaire commune cherchée.

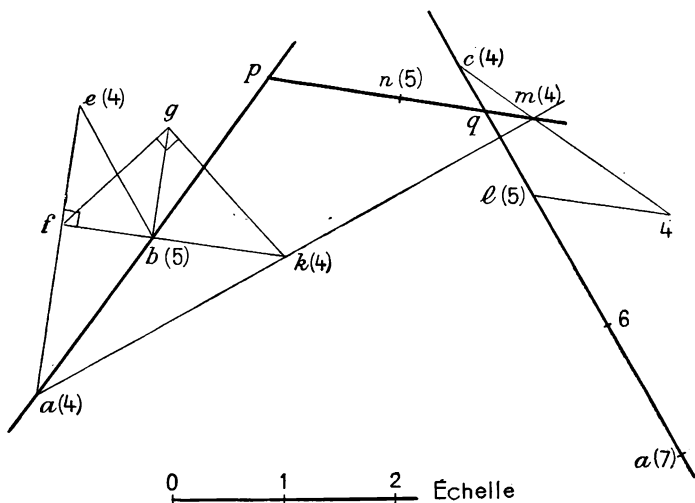


Fig. 280. — Perpendiculaire commune de deux droites quelconques.

Les horizontales de cote 4 se coupent en m (4). En menant par ce point la parallèle à BK nous obtenons la droite cherchée m (4) n (5).

Les pieds de la perpendiculaire sont les points p et q où mn coupe respectivement ab et cd . On peut trouver leurs cotes soit en les relevant sur mn ou sur ab et sur cd .

La plus courte distance est la vraie grandeur de pq . On peut la construire (sans les cotes) en construisant sur pq un triangle semblable au triangle bkq , pq étant l'homologue de bk .

EXERCICES SUR LE CHAPITRE VII

283. — Par un point donné A, situé dans un plan donné (P), mener dans ce plan une droite parallèle à un autre plan donné (Q).

284. — Construire le point commun à trois plans définis chacun par une horizontale et un point (les trois points ont même cote).

285. — On donne trois droites, non situées deux à deux dans un même plan, et dont l'une est verticale.

1° Mener une droite rencontrant ces trois droites connaissant la direction de sa projection horizontale.

2° Mener une droite rencontrant ces trois droites de façon que les trois points de rencontre déterminent deux segments égaux.

286. — Mener, par un point donné A, une droite (D) sachant qu'elle est dans un plan donné (P) passant par A et que la plus courte distance de (D) et d'une verticale donnée (Δ) est égale à une longueur donnée.

287. — Mener, par un point donné A, une droite (L) rencontrant une droite donnée (D) et orthogonale à une autre droite (Δ).

288. — Mener, par un point donné A, un plan perpendiculaire à deux plans donnés.

289. — Trouver, sur une droite donnée, un point équidistant de deux horizontales données de même cote.

290. — On donne deux plans verticaux (P) et (Q). Soit (D) une droite donnée du plan (P). Mener par (D) un plan coupant (Q) suivant une droite perpendiculaire à (D).

291. — Mener, par un point donné A, un plan parallèle à une droite donnée (D) et perpendiculaire à un plan donné (P).

292. — Par un point donné A d'une droite donnée (D), mener une droite perpendiculaire à (D) et qui soit parallèle à un plan donné (P).

293. — Mener une droite rencontrant deux droites données (D) et (Δ) et orthogonale à deux autres droites données (X) et (Y).

294. — Construire les projections de la symétrique d'une droite donnée par rapport à un plan vertical donné.

295. — Construire la projection cotée du symétrique d'un point donné A par rapport à un plan donné par son échelle de pente.

296. — Reconnaître si deux plans, donnés par leurs échelles de pente, sont rectangulaires.

297. — Construire la projection cotée du symétrique d'un point donné par rapport à une droite donnée (D) dans les cas suivants :

1° (D) est verticale;

2° (D) est horizontale;

3° (D) est quelconque.

298. — On donne les projections de deux droites rectangulaires et concourantes. L'une d'elles est graduée. Graduer l'autre.

299. — Une épure représente deux droites concourantes et graduées. On a perdu l'échelle graphique mais on sait que les droites sont orthogonales. Peut-on retrouver l'échelle?

300. — Par un point donné A mener un plan vertical perpendiculaire à un plan donné (non horizontal).

301. — Construire la perpendiculaire commune à deux droites dont l'une est horizontale.

302. — Mener, par un point donné A, une droite coupant à angle droit une autre droite donnée.

303. — Un plan (P) est défini par son échelle de pente. Construire le symétrique Q du plan de comparaison par rapport au plan (P). Si l'intervalle de (P) est i , calculer l'intervalle du plan (Q).

304. — On donne les projections cotées de deux points A et B.

1° Déterminer la cote d'un point M tel que $MA = MB$ connaissant sa projection horizontale m .

2° Plus généralement, trouver sur une droite donnée (D) un point équidistant de A et de B.

305. — Construire un trièdre trirectangle connaissant :

1° la projection cotée du sommet, la projection cotée d'une arête et la pente d'une autre arête.

2° la projection cotée du sommet, la trace horizontale d'une face et la pente d'une arête de cette face.

ÉPURES

NOTA. — Les indications générales données à la fin du Chapitre Premier sont applicables en ce qui concerne : le papier, les instruments, les constructions et le tracé définitif.

Quelques modifications sont à apporter en ce qui concerne :

1° *le format*. Comme on ne dessine qu'une projection, nous proposerons des textes donnant lieu à des épures qui peuvent être exécutées sur un format 17×13 .

2° *la mise en place*. Les données sont rapportées à deux axes rectangulaires $x'ox$ et $y'oy$ qui passent par le centre de la feuille : $x'o'x$ est le petit axe et $y'o'y$ le grand axe. Elles sont toujours exprimées en centimètres. La cote est indiquée par z . Sauf avis contraire, l'unité graphique est le centimètre.

On notera que la *punctuation* se ramène à savoir reconnaître de deux points situés sur une même verticale quel est celui qui est vu. Les figures à représenter étant, dans cet ouvrage, limitées par des plans, on est ramené au problème étudié au n° 133.

306. — ABCD est un parallélogramme. Le côté AB, de longueur 3, est horizontal. Sa projection ab fait 45° avec $x'x$. On donne :

$$\begin{array}{lll} A : x = -5; & y = -5; & z = 3. \\ B : x > -5; & y < -5; & z = 3. \end{array}$$

Le côté AD a pour longueur 5. On donne :

$$D : x = -2; \quad y = -5; \quad z > 3.$$

1° Déterminer la projection $abcd$ du parallélogramme.

2° Construire l'ombre portée sur le plan de comparaison, les rayons lumineux étant parallèles et choisis de façon que le point A porte ombre au point de coordonnées : $x = -2,5; y = 0,5$.

307. — Sur la feuille de dessin, on trace le cercle de rayon 5, centré en a sur oy : $oa = 2$. On marque le point b sur oy : $ob = 3$.

1° Construire sur la feuille le triangle équilatéral bcd de centre a .

2° On considère les points de l'espace A, B, C, D dont les projections respectives sont a, b, c, d et les cotes 2, 4, 0, 0. On prolonge CA d'une longueur $AE = CA$ et on prolonge DA d'une longueur $AF = DA$. Déterminer les projections cotées des parallélogrammes $CEGH$ et $DFIJ$ tels que les segments EG, CH, FI, DJ soient parallèles et égaux à AB et de même sens.

3° Représenter la figure formée par ces parallélogrammes constitués par des plaques opaques.

On teintera au crayon rouge les portions vues de la plaque $CEGH$ et au crayon bleu les portions vues de l'autre plaque.

308. — On considère deux plaques opaques ayant la forme de parallélogrammes $ABCD$ et $MNPQ$. Elles sont définies par les coordonnées de leurs sommets

	A	B	C	D	M	N	P	Q
x	— 4	4	4	— 4	— 4	— 4	0	0
y	— 7	— 3	2	— 2	8	2	— 7	— 1
z	0	0	7	7	0	10	10	0

1° Déterminer l'intersection des plans de deux plaques.

2° Représenter l'ensemble de ces plaques, avec la ponctuation convenable.

309. — 1° Dessiner parallèlement au bord droit de la feuille l'échelle de pente d'un plan (P) représentant un terrain incliné de pente $\frac{1}{2}$. L'horizontale de cote 3 est projetée suivant $x'Ox$. Les cotes croissent vers le haut.

2° On considère un rectangle $ABCD$ horizontal de cote 5 dont les sommets A et B ont pour coordonnées :

$$A : x = -1,5; y = 0; z = 5; \quad B : x = 0; y = 3; z = 5.$$

Les côtés BD et AC ont pour longueur commune 4,5, les projections d et c se trouvant à droite de Oy .

Ce rectangle est la face supérieure d'un tas de sable formé sur le plan (P). Les faces latérales ont pour pente 2.

Déterminer les intersections des faces latérales adjacentes ainsi que les intersections de ces faces latérales avec le plan (P).

3° Représenter le terrain et le tas de sable et indiquer en rouge les horizontales de cotes 0; 1; 2; 3; 4; 4,5; 5.

310. — On considère deux plaques opaques ayant l'une la forme d'un parallélogramme $ABCD$ et l'autre la forme d'un triangle MNP . Elles sont définies par les coordonnées de leurs sommets

	A	B	C	D	M	N	P
x	2	5,5	— 1,5	— 5	2	2	— 2
y	— 7	0	3,5	— 3,5	— 3,5	7	0
z	5	5	9	9	1	5	11

1° Nature du quadrilatère $abcd$.

2° Intersection des plans des deux plaques.

3° Représenter l'ensemble des deux plaques, avec la ponctuation convenable.

TRANSFORMATION DES PROJECTIONS

- 1. *Changement de plan. Rotation.*
- 2. *Rabattement.*
- 3. *Problèmes de distances et d'angles.*

1

CHANGEMENT DE PLAN.
ROTATION

■ 153. **Changement de plan.** — En géométrie cotée, le plan de projection est physiquement horizontal. Il doit, en général, conserver cette propriété. On ne change donc pas ce plan. Tout au plus peut-on le hausser ou l'abaisser, ce qui revient à changer les cotes par addition d'un nombre fixe négatif ou positif. Ceci peut avoir quelque intérêt pour simplifier les cotes; mais les projections et les constructions ne sont pas modifiées de ce fait.

Il est, par contre, souvent commode de faire une *projection verticale auxiliaire* et même plusieurs fois dans une même épure (n° 118). En pratique, on a un avantage, dans certaines questions, à rendre de bout un plan donné. Il suffit de prendre une ligne de terre xy parallèle à la projection d'une ligne de pente.

EXEMPLE. — Rendre de bout le plan (P) admettant $a(0) b(2)$ pour échelle de pente (fig. 281).

La projection frontale de $a(0)$ est a' sur xy .

La projection frontale de $b(2)$ est b' obtenu en portant sur la ligne de rappel $b\beta$ la longueur $\beta b'$ égale à deux unités graphiques. Le plan est rendu de bout et sa trace frontale est $a'b'$.

On met alors en évidence l'angle du plan et du plan horizontal en $\widehat{b'a'\beta} = \alpha$.

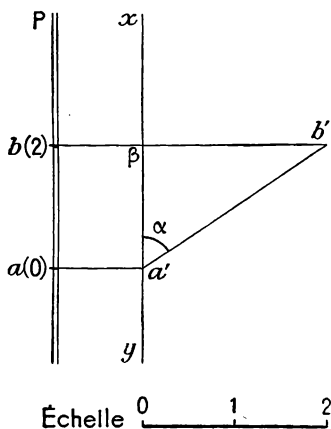


Fig. 281. — Rendre un plan de bout.

■ **154. Rotation autour d'un axe vertical.** — En géométrie cotée, une rotation autour d'un axe vertical conserve la forme de la projection horizontale. Elle présente donc peu d'intérêt pour le dessin lui-même.

■ **155. Rotation autour d'un axe horizontal.** — Une telle rotation modifie à la fois la forme de la projection et la grandeur des cotes. Il est facile d'effectuer cette rotation en choisissant un plan frontal de projection perpendiculaire à l'axe. On est ramené à une rotation autour d'un axe de bout.

EXEMPLE. — *Faire tourner d'un angle droit le parallélogramme ABCD autour de son côté horizontal AB* (fig. 282).

Soit $a(0)$ $b(0)$ $c(3)$ $d(3)$ la projection cotée du parallélogramme. En prenant une ligne de terre xy perpendiculaire à ab , on obtient la projection frontale $a'b'c'd'$. Par une rotation d'un angle droit autour de la droite de bout AB, le point C vient en (γ, γ') et le point D vient en (δ, δ') . En mesurant les cotes de C et de D à l'échelle graphique on trouve 1,5.

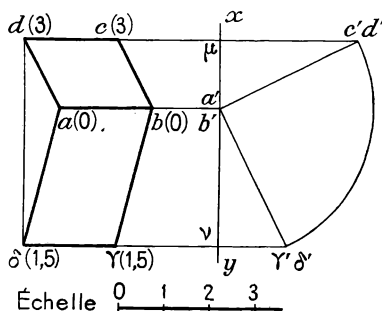


Fig. 282.

La nouvelle projection cotée du parallélogramme est :

$a(0)$ $b(0)$ $\gamma(1,5)$ $\delta(1,5)$.

EXERCICES

311. — On donne un plan (P) par son échelle de pente et l'on considère un axe vertical (Δ).

1° Intersection de (Δ) et de (P).

2° Construire l'échelle de pente du plan (P') obtenu en faisant tourner (P) autour de (Δ) de 180° .

3° Intersection des plans (P) et (P').

312. — On donne une droite (D) et un axe vertical (Δ) ne rencontrant pas (D).

1° Construire la droite (D') obtenue en faisant tourner (D) autour de (Δ) de 180° .

2° Déterminer la perpendiculaire commune à (D) et à (D').

313. — On considère une droite horizontale $h(2)$ et un point $a(7)$. La distance de la projection a à la projection de h est 5.

Déterminer la projection cotée du point B obtenu en faisant tourner A de 90° autour de $h(2)$. (Le problème admet deux solutions suivant le sens de la rotation.)

2

RABATTEMENT

■ **156. Règle du triangle rectangle.** — Le **rabattement** d'un plan (P), en géométrie cotée, est une rotation autour d'une horizontale de ce plan, appelée **charnière**, qui amène ce plan à être horizontal.

Dans le cas où le plan (P) est vertical, l'opération revient, au point de vue graphique, à une projection verticale auxiliaire dont la ligne de terre xy coïncide avec la trace du plan.

Dans le cas général, l'étude à faire est la même qu'en géométrie de Monge (nos 85 et 86) et elle aboutit à la même règle que nous rappelons :

→ La projection horizontale du rabattement d'un point d'un plan se trouve sur la perpendiculaire menée de la projection horizontale m du point à la projection horizontale (h) de la charnière et à une distance de (h) égale à l'hypoténuse d'un triangle rectangle. Un côté de l'angle droit de ce triangle est la distance de m à (h), l'autre côté est égal à la valeur absolue de la différence des cotes du point et de la charnière.

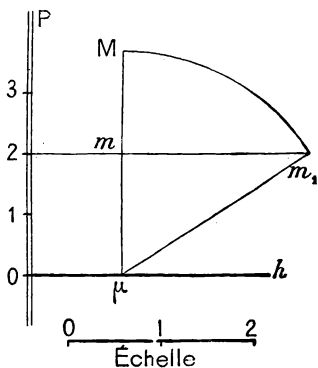


Fig. 283. — Rabattement d'un point.

EXEMPLE. — La figure 283 montre le plan (P) défini par son échelle de pente, l'horizontale de cote zéro de ce plan qui servira de charnière et le point $m(2)$ de ce plan.

Le rabattement de $m(2)$ se trouve sur la perpendiculaire $m\mu$ à la charnière. Nous construisons le triangle rectangle dont un côté est μm et l'autre côté mm_1 est égal à deux unités graphiques (différence des cotes de $m(2)$ et de la charnière $h(0)$). L'hypoténuse de ce triangle est μm_1 que nous portons sur μm en μM . Le point M est le rabattement cherché.

Comme en géométrie de Monge, le problème admet deux solutions.

■ **157. Rabattement d'une figure plane.** — Un point du plan ayant été rabattu, il s'agit de savoir rabattre un autre point du plan. On pourrait, certes, utiliser encore une fois la règle du triangle rectangle mais ainsi que nous l'avons remarqué au n° 87 il est préférable d'utiliser la *méthode des alignements*.

La figure 284 montre l'échelle de pente P d'un plan et a (2) un point du plan, rabattu en A autour de la charnière h (0).

Soit b la projection frontale d'un autre point du plan.

On veut construire le rabattement B de ce point. La projection ab coupe (h) au point i (0) qui reste fixe dans le rabattement. Le rabattement B se trouve donc sur iA et sur la perpendiculaire issue de b à la projection (h) de la charnière.

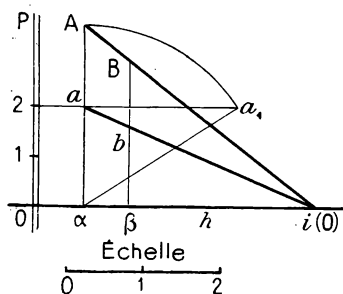


Fig. 284. — Rabattement d'une figure plane.
Méthode des alignements.

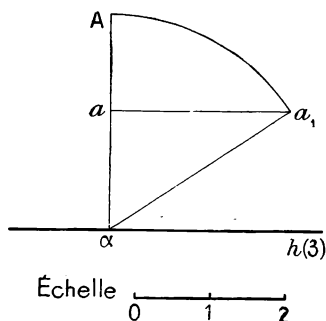


Fig. 285. — Relèvement d'un point.
Règle du triangle rectangle.

On se reportera utilement au n° 90 pour retrouver les propriétés de correspondance entre la projection d'une figure plane et son rabattement.

■ 158. **Problème inverse.** — Un point du plan étant rabattu en A , il s'agit de déterminer sa cote. Les données du problème sont :

- la projection et la cote de la charnière,
- la projection a du point et le rabattement A ,
- l'échelle graphique.

Il suffit de faire les constructions du rabattement en sens inverse : on mène la perpendiculaire $A\alpha$ sur (h) et on trace le cercle de centre α et de rayon αA . Ce cercle coupe la parallèle à (h) , menée par a , en a_1 . La différence des cotes du point et de la charnière est aa_1 , mesurée à l'échelle du dessin. On trouve, sur la figure 285,

$$aa_1 = 2,4.$$

La cote du point est donc égale à la cote 3 de la charnière augmentée ou diminuée de 2,4. Le problème admet deux solutions, on obtient les points a (5,4) et a (0,6).

L'opération que nous venons de faire s'appelle **relèvement**.

■ **159. Relèvement d'une figure plane.** — Les données du problème sont : la projection et la cote de la charnière, la projection cotée d'un point du plan et le rabattement A de ce point. Il s'agit de **relever** un point du plan rabattu en B.

On utilise la *méthode des alignements*. La droite AB coupe (*h*) en *i*.

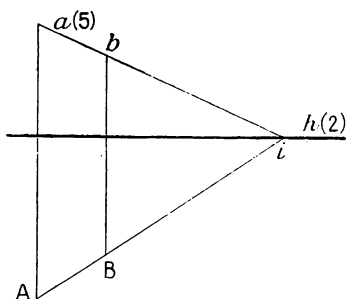


Fig. 286. — Relèvement d'une figure plane.

Méthode des alignements.

Le relèvement de B se trouve sur *ia* et sur la perpendiculaire menée de B à (*h*). On obtient le point *b*. Il reste à trouver la cote du point. On peut la trouver connaissant la cote de *i* et celle de *a*. Sur la figure 286, on obtient que le point *b* de la droite *i* (2) *a* (5) a pour cote 4,2. On peut vérifier les tracés en évaluant aussi la cote du point projeté en *b* à l'aide de l'horizontale du plan.

■ **160. Angle de rabattement.** — Comme en géométrie de Monge, l'angle $\varphi = \widehat{a\alpha a_1}$ est l'angle aigu du plan (P) et du plan horizontal. Par suite, pour tous les points du plan, l'application de la règle du triangle rectangle, conduira à des triangles rectangles semblables entre eux. L'un quelconque de ses triangles s'appelle *triangle de rabattement* et l'angle φ *angle de rabattement*.

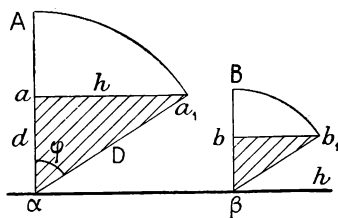


Fig. 287.

Triangles de rabattement.

On peut utiliser ce résultat pour donner une autre solution des problèmes n° 157 et 158. Par exemple, pour rabattre le point *b*, on construit le triangle $b\beta b_1$ dont les côtés sont parallèles aux côtés du triangle $a\alpha a_1$. On en déduit b_1 puis B. On ferait des constructions analogues pour relever (fig. 287).

■ **161. Utilité de rabattement.** — On exécute le rabattement d'une figure plane pour tracer des constructions *non projectives*. Il faut ensuite opérer le relèvement.

EXEMPLE. — Construire la projection cotée d'un carré dont on donne les projections cotées du centre et de la droite qui porte un côté.

Soit le centre *o* (2) et la droite *a* (4) *b* (5) qui porte un côté. Le plan du carré est défini par les trois points : *o* (2); *a* (4); *b* (5). Nous allons

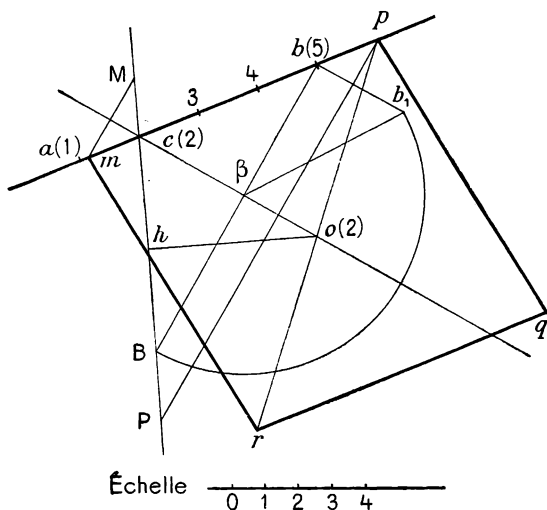


Fig. 288. — Construire un carré, connaissant le centre et la droite qui portent côté.

rabattre ce plan sur le plan horizontal de cote 2 (fig. 288).

Nous avons pris pour charnière l'horizontale $o(2) c(2)$. Le point $b(5)$ a été rabattu en B par la règle du triangle rectangle ($bb_1 = 3$ unités graphiques). La droite cb est rabattue en cB . On peut alors construire le côté du carré porté par la droite donnée : on mène la perpendiculaire oh , puis on porte $hM = hP = ho$. Les points M et P se relèvent en m et p sur ab en menant Mm et Pp perpendiculaires à la charnière. On détermine les autres sommets q et r par symétrie par rapport au centre. Il reste à déterminer les cotes. On trouve : $m(4,15)$; $p(6,15)$; $q(2,85)$; $r(-2,15)$.

EXERCICES

314. — Une épure représente un plan (P) défini par son échelle de pente, un point a du plan et son rabattement A autour de l'horizontale h (0). On n'a pas l'échelle graphique. Peut-on la reconstituer?

315. — On donne la projection cotée $a(0) \ b(1) \ c(2)$ d'un triangle.

123. Trouver la projection et la cote de l'orthocentre.

On supposera, pour faire le dessin, que $ab = bc = ca = 5$ cm.

Serait-il nécessaire d'employer un rabattement pour tracer les médianes et pour obtenir la cote du centre de gravité?

316. — On donne les points a (2) et b (6). La droite AB est la diagonale d'un carré et l'autre diagonale est horizontale. Construire la projection du carré et trouver les cotes des sommets. On prendra $ab = 10$ cm.

317. — On donne deux points a (4) et b (4). Construire un triangle équilatéral ABC connaissant la projection ad de la droite qui porte le côté AC .

3

**PROBLÈMES
DE DISTANCES
ET D'ANGLES**

■ **162. Distance de deux points.** — Nous rappelons, pour mémoire, que le problème a été traité au n° 124 soit par un procédé graphique qui utilise une

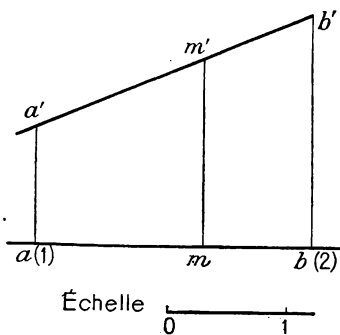


Fig. 289.

soit par un procédé algébrique qui exige l'extraction d'une racine carrée.

Inversement, soit à porter sur une droite donnée, à partir d'un point A de la droite, une longueur donnée l . On fait une projection verticale auxiliaire (fig. 289) et sur la projection frontale $a'b'$ de la droite, on porte $a'm' = l$. On en déduit la

projection horizontale m du point puis sa cote. Le problème admet évidemment deux solutions.

■ **163. Distance d'un point à une droite.** — Si la droite est *verticale*, la perpendiculaire abaissée du point sur la droite est horizontale. La distance est projetée en vraie grandeur. La solu-

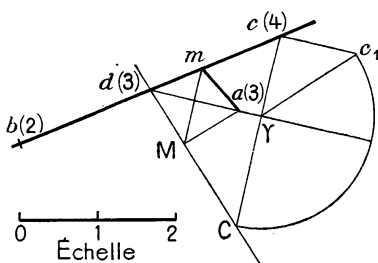


Fig. 290. — Distance d'un point à une droite.

tion est immédiate.

Dans le *cas général*, la méthode est la même qu'en géométrie de Monge :

→ Pour trouver la distance d'un point à la droite, on rabat le plan qu'ils déterminent.

EXEMPLE. — Trouver la distance du point $a(3)$ à la droite $b(2)c(4)$.

Sur cette droite (fig. 290), nous marquons le point $d(3)$ et nous avons, suivant $a(3)d(3)$ l'horizontale de cote 3 du plan. Rabattons ce plan autour de cette droite. Les points a et d sont sur la charnière.

On construit en C le rabattement de $c(4)$ par la règle du triangle rectangle. Le rabattement de la droite est dC . Si, de a , on mène la perpendiculaire aM sur dC , on a, suivant aM la distance cherchée. A l'échelle du dessin la distance est $aM = 0,8$.

On peut relever M en m sur bc (Mm perpendiculaire à la charnière). Il reste à trouver sa cote. On obtient sur la figure la cote 3,4.

■ 164. Distance d'un point à un plan. — Si le plan est *horizontal*, la perpendiculaire abaissée du point est verticale. Sa construction est immédiate. La distance est égale à la différence des cotes du point et du plan.

Si le plan est *vertical*, la perpendiculaire est horizontale. Sa construction est immédiate. La distance est projetée en vraie grandeur. On la mesure à l'échelle graphique.

Dans le *cas général*, on emploie la même méthode qu'en géométrie de Monge.

→ Pour trouver la distance d'un point à un plan, on fait une projection verticale auxiliaire pour rendre le plan de bout.

EXEMPLE. — Trouver la distance d'un point $a(7)$ à un plan défini par son échelle de pente P.

Choisissons une ligne de terre (fig. 291) xy perpendiculaire aux horizontales du plan et établissons une projection frontale. Le plan devient de bout.

On obtient sa trace frontale par les projections frontales des points $b(2)$ $c(4)$ d'où la trace $b'c'$. Le point donné se projette en (a, a') . La perpendiculaire abaissée du point (a, a') est une frontale.

La distance du point au plan est projetée frontalement en vraie grandeur suivant la distance $a'm'$ de a' à $b'c'$. En la mesurant à l'échelle du dessin, on trouve $a'm' = 3,8$.

En rappelant le point m' en m et en mesurant sa cote $z = \mu m'$ on obtient la projection cotée $a(7) m(3,2)$ de la perpendiculaire.

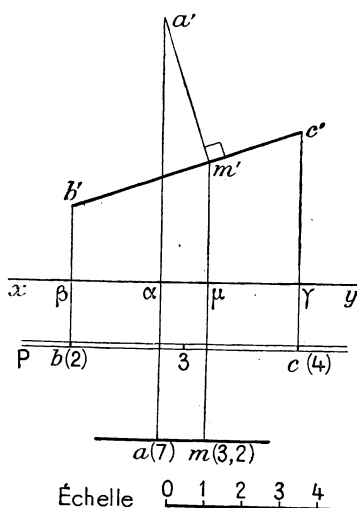


Fig. 291. — Distance d'un point à un plan.

Inversement, on peut chercher à mener à un plan donné, par un point de ce plan, une perpendiculaire de longueur donnée. Il suffit d'effectuer les tracés de la figure 291 dans l'ordre inverse.

■ **165. Plus courte distance de deux droites.** — Comme en géométrie de Monge, on cherche la distance d'un point de l'une des droites au plan parallèle à cette droite mené par l'autre.

On est donc ramené à chercher la distance d'un point à un plan.

Les cas particuliers signalés au n° 152 conduisent à des constructions immédiates.

Nous signalerons seulement le cas où l'une des droites est horizontale. Une projection frontale auxiliaire permettra de la rendre de bout.

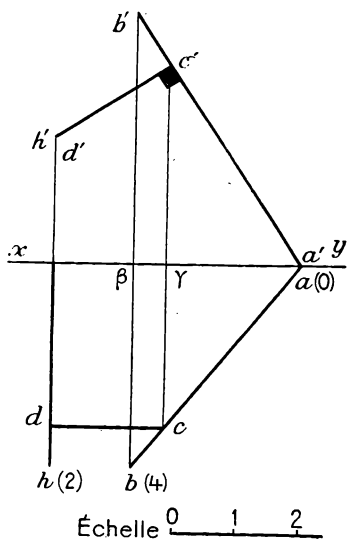


Fig. 292. — Plus courte distance d'une horizontale et d'une droite quelconque.

EXEMPLE. — Trouver la plus courte distance et la perpendiculaire commune à l'horizontale h (2) et à la droite a (0) b (4).

Nous ferons une projection frontale auxiliaire en prenant une ligne de terre xy perpendiculaire à h (fig. 292). Nous avons choisi xy passant par a . L'horizontale h (2) devient de bout en : (h, h').

La droite a (0) b (4) devient la droite ($ab, a'b'$).

La plus courte distance est la distance $h'c'$ de h' à $a'b'$. Mesurée à l'échelle graphique, on trouve $h'c' = 2,1$.

La perpendiculaire commune est la frontale ($cd, c'd'$). Il reste à trouver les cotes des points (c, c'); (d, d'). Sur l'épure on trouve c (3,1) et d (2).

■ **166. Angle de deux droites.** — Si les droites ne sont pas concourantes, on mène, par un point de l'espace, les parallèles à ces droites, puis on applique la règle suivante :

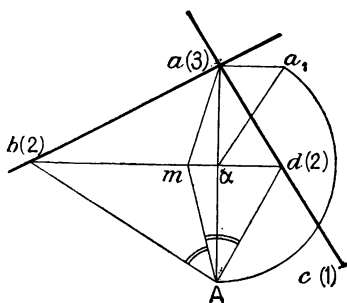
→ Pour mettre en évidence les angles formés par deux droites concourantes, on rabat le plan de ces droites.

EXEMPLE. — Évaluer l'angle des demi-droites concourantes a (3) b (2) et a (3) c (1) et construire la projection cotée de la bissectrice.

Nous construisons l'horizontale b (2) d (2) du plan des deux demi-droites (fig. 293). Nous rabattons ce plan autour de bd . Les points b et d sont sur la charnière. Le point a (3) se rabat en A en utilisant la règle du triangle rectangle. Les droites données sont rabattues en Ab et Ad .

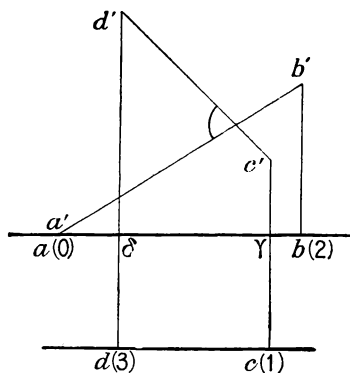
L'angle cherché est l'angle $\widehat{bAd}$.

Traçons la bissectrice Am de l'angle $\widehat{bAd}$, le pied m étant sur la charnière. La projection cotée de la bissectrice est $a(3)m(2)$.



Échelle 0 1 2

Fig. 293. — Angle de deux droites quelconques. Bissectrice intérieure.



Échelle 0 1

Fig. 294. — Angle de deux droites dont les projections sont parallèles.

● **CAS PARTICULIER.** — Si les deux droites données sont dans un même plan vertical (ou sont parallèles à un même plan vertical) on peut faire une projection verticale auxiliaire.

En prenant la ligne de terre xy parallèle à la trace du plan vertical, les deux droites deviennent frontales et les constructions sont faciles.

EXEMPLE. — Évaluer les angles des deux droites $a(0) b(2)$ et $c(1) d(3)$ dont les projections sont parallèles (fig. 294).

Prenons une ligne de terre xy confondue avec ab ; on obtient les projections frontales $a'b'$ et $c'd'$ des deux droites.

Les angles sont obtenus en vraie grandeur en projection frontale. Sur la figure on a marqué un angle aigu.

■ 167. Angle d'une droite et d'un plan. — La règle est la suivante :

→ Pour construire l'angle d'une droite et d'un plan, on prend le complément de l'angle aigu que fait la droite avec une normale au plan.

On est ainsi ramené à trouver l'angle aigu de deux droites.

EXEMPLE. — Évaluer l'angle de la droite $a(3) b(4)$ et d'un plan défini par son échelle de pente (P). L'intervalle de plan est $\frac{1}{2}$ (fig. 295).

Par le point $a(3)$ menons la perpendiculaire au plan. Sa projection est parallèle à la projection de l'échelle de pente; son intervalle, inverse de celui du plan, est 2. On obtient la droite $a(3) c(4)$. En rabattant le plan $a(3) b(4) c(4)$ autour de l'horizontale $b(4) c(4)$ on obtient l'angle $\widehat{bAc}$. Traçons Ad perpendiculaire en A à Ab , l'angle de la droite et du plan est l'angle $\widehat{dAc}$.

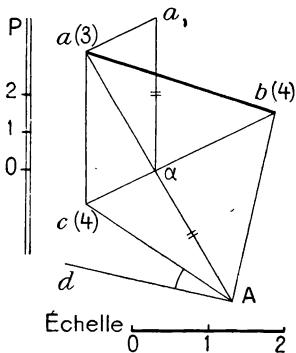


Fig. 295. — Angle d'une droite et d'un plan.

● **CAS PARTICULIERS.** — L'angle d'une droite et du plan de comparaison a été déterminé à l'aide d'une projection verticale auxiliaire (n° 124).

■ **168. Angle de deux plans.** — La méthode est la suivante :

→ Pour trouver les angles de deux plans on les coupe par un plan perpendiculaire à leur intersection et on cherche les angles des droites obtenues.

On est ainsi ramené à évaluer les angles de deux droites.

On pourrait aussi, comme en géométrie de Monge, substituer à l'angle de deux plans, l'angle de leurs normales. Outre les inconvénients signalés au n° 101, il s'ajoute, en géométrie cotée, les constructions supplémentaires des intervalles des perpendiculaires.

EXEMPLES. — I. Évaluer l'angle aigu d'un plan et du plan de comparaison. Construire un plan bissecteur.

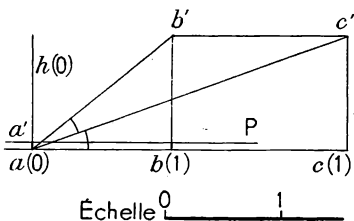


Fig. 296.

Soit le plan défini par son échelle de pente P (fig. 296). Par une projection verticale auxiliaire définie par la ligne de terre xy confondue avec la projection de P, le plan devient de bout. Sa trace frontale est $a'b'$. L'angle du plan est du plan de comparaison est $\alpha = \widehat{b'ab}$.

Un plan bissecteur, également de bout, a pour trace frontale la bissectrice $a'c'$ de cet angle. Le point c' de cote 1 de cette bissectrice conduit au point $c(1)$. Le plan bissecteur est le plan défini par l'horizontale $a(0) h(0)$ et le point $c(1)$.

II. Évaluer les angles de deux plans définis par leurs échelles de pente (P) et (Q) dont les projections ne sont pas parallèles (fig. 297).

Nous construisons l'intersection $a(3) b(4)$ des deux plans en prenant les points de rencontre de leurs horizontales de cotes 3 et 4.

Considérons le plan (R) mené par $a(3)$ perpendiculairement à l'intersection $a(3) b(4)$. La ligne de pente de ce plan menée par $a(3)$ est projetée suivant ab . L'intervalle du plan est l'inverse de la longueur ab . On l'obtient à l'aide d'un triangle bcd rectangle en c et dont la hauteur ca est égale à l'unité graphique :

$$\overline{ad} \cdot \overline{ab} = -\overline{ac}^2 = -1.$$

Pour déterminer les intersections du plan (R) et des plans (P) et (Q) on a utilisé les horizontales de cotes 3 et 4. L'intersection de (R) et de (P) est la droite $a(3) e(4)$. L'intersection de (R) et de (Q) est la droite $a(3) f(4)$.

L'un des angles des deux plans est l'un des angles de ces droites. Nous rabattons alors sur le plan horizontal de cote 4. La charnière est $e(4) f(4)$. Le rabattement de $a(3)$ s'obtient par la règle du triangle rectangle : on remarque que le triangle de rabattement est déjà construit puisque ac est égal à l'unité graphique c'est-à-dire à la différence des cotes de $a(3)$ et de la charnière. On obtient donc le point A situé sur la droite ab et à la distance $dA = dc$.

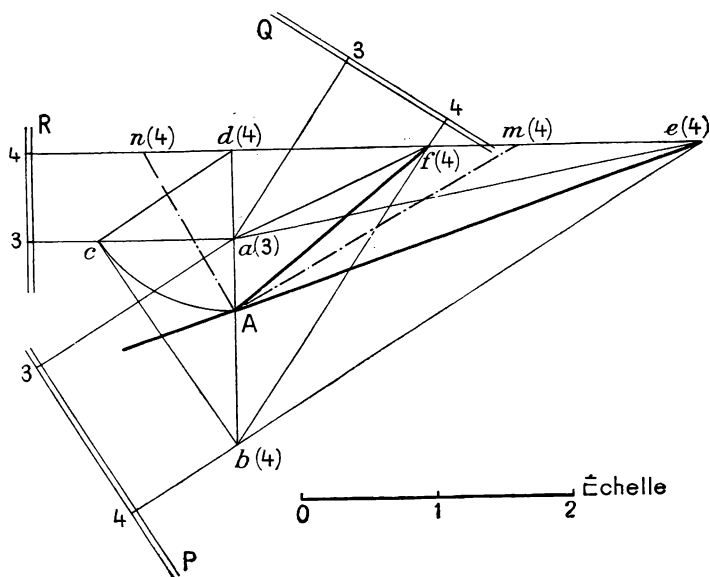


Fig. 297.

Un des angles des deux plans est l'angle $\widehat{eAf}$. Après le rabattement, les bissectrices des rectilignes sont rabattues suivant les bissectrices Am et An de l'angle eAf . Les points $m(4)$ et $n(4)$ étant sur la charnière, on en conclut que les plans bissecteurs sont les plans passant par l'arête $a(3) b(4)$ et contenant respectivement les points $m(4)$ et $n(4)$.

EXERCICES

- 318.** — Trouver la distance de deux droites parallèles.
- 319.** — Évaluer les angles d'une verticale et d'une droite quelconque.
- 320.** — Mener, par un point donné A, une horizontale qui fait un angle de 60° avec une horizontale donnée.
- 321.** — Mener, par un point donné, un plan de pente donnée, parallèle à une droite donnée.
- 322.** — Trouver la distance d'un point à une droite horizontale.
- 323.** — Évaluer l'angle d'une droite et d'un plan vertical.
- 324.** — Évaluer les angles de deux plans dont l'un est vertical.
- 325.** — On donne les projections de deux points, la cote de l'un d'eux et la distance qui les sépare. Trouver la cote de l'autre.
- 326.** — On donne la projection cotée d'un point, la projection d'une horizontale et la distance du point à la droite. Trouver la cote de l'horizontale.
- 327.** — Mener, par un point donné, une droite de pente donnée dont la trace horizontale soit à une distance donnée d'un point donné du plan horizontal.
- 328.** — Mener un plan situé à une distance donnée d'un plan défini par deux droites concourantes.
- 329.** — Mener, par un point donné $m(2)$, une droite (D) rencontrant la droite $a(1) b(3)$ et faisant 30° avec elle.
- 330.** — On donne l'horizontale $h(1)$. Déterminer une droite (D) connaissant sa projection d et l'angle α qu'elle fait avec l'horizontale.
- 331.** — On donne la droite $a(0) b(3)$. Mener par $a(0)$ une horizontale faisant avec la droite un angle donné α .
- 332.** — Trouver la cote du point A connaissant sa projection a et sachant que l'angle $\widehat{BAC}$ est droit. Les points B et C sont donnés par leurs projections $b(0)$ et $c(0)$.
- 333.** — On donne les points $a(0)$ et $b(0)$. Déterminer la cote d'un point C connaissant sa projection c et sachant que l'angle $\widehat{ACB}$ vaut 30° .
- 334.** — On donne un plan (P) par son échelle de pente. Mener, par l'horizontale $h(0)$ du plan, un plan faisant un angle donné α avec (P).
- 335.** — Construire l'échelle de pente d'un plan (Q) sachant que le plan de comparaison est bissecteur de l'un des dièdres formés par (Q) et par un plan donné (P).
- 336.** — L'arête d'un dièdre est une horizontale donnée $h(6)$. On donne les traces $d(0)$ et $\delta(0)$ des faces du dièdre sur le plan de comparaison. Construire la trace du plan bissecteur.
- 337.** — On donne le segment $a(0) b(3)$. Construire sur ce segment comme diagonale un carré dont le plan est incliné à 60° sur le plan de comparaison.
- 338.** — Mener, par la droite $a(1) b(3)$, un plan faisant 60° avec le plan vertical de trace ab .
- 339.** — On donne les projections de trois droites. Une seule est graduée. Graduer les deux autres sachant que la première est leur perpendiculaire commune.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE VIII

340. — Construire un carré dont on donne la projection cotée d'un sommet et la projection cotée d'une diagonale ne contenant pas ce sommet.

341. — Construire un carré dont on donne la projection cotée d'une diagonale qui est une ligne de pente du plan du carré.

342. — Construire un triangle équilatéral dont on donne la projection cotée d'un sommet et la projection cotée du côté opposé.

343. — Construire sur un segment $a(0) b(2)$, un triangle équilatéral dont le plan a pour pente 0,3.

344. — Construire un triangle équilatéral vertical connaissant les projections cotées de deux sommets.

345. — On donne la projection abc d'un triangle ABC isocèle et rectangle en A. Le triangle abc est équilatéral. La cote de A est égale à :

$$ab = bc = ca = 6 \text{ cm.}$$

1° Déterminer les pentes des droites AB et AC.

2° Calculer la cote du milieu M de BC et les cotes de B et de C.

346. — On donne deux plans par leurs échelles de pente. Faire tourner l'un des plans autour d'un axe vertical pour l'amener à être perpendiculaire à l'autre.

347. — On appelle h la distance d'un point M à un plan (P). Montrer qu'en désignant par i l'intervalle du plan, par d la distance de M à l'horizontale de (P) qui a même cote, on a :

$$h = \frac{d}{\sqrt{i^2 + 1}}.$$

348. — On donne un point $a(5)$. Son rabattement autour d'une droite horizontale de cote 2 est un point donné A. Construire la charnière.

349. — On donne les points $b(0)$ et $c(0)$. Déterminer la cote d'un point A projeté en a tel que : $ab = ac$; $\widehat{bac} = 120^\circ$ et sachant que l'angle $\widehat{BAC}$ est droit.

Évaluer la pente du plan ABC.

350. — Mener, par une droite horizontale donnée, un plan situé à une distance donnée d'un point donné.

351. — On donne un plan par son échelle de pente. Déterminer la cote d'un point A de l'espace connaissant sa projection a et la distance de A au plan.

352. — Construire une verticale connaissant ses plus courtes distances à une verticale donnée et à une autre droite donnée.

353. — On donne la projection cotée d'une horizontale $h(1)$ et d'un point $a(5)$. Trouver une droite passant par le point, connaissant sa projection d (passant par a) et sachant que la plus courte distance de cette droite et de $h(1)$ est égale à une longueur donnée l .

354. — On donne la projection cotée $a(0)$ de A, les projections b et c de deux points B et C à déterminer, l'angle α de la droite AB avec le plan de comparaison. Déterminer les cotes des points B et C pour que l'aire du triangle ABC soit la plus petite possible.

ÉPURES

355. — On considère le point Ω de cote 3 projeté en ω sur Oy : $\overline{O\omega} = 3,5$. Ce point est le centre d'un hexagone régulier dont un côté AB, situé dans le plan de comparaison, est projeté suivant une droite de coefficient angulaire -1 dans le système d'axes Ox, Oy . Le plan de l'hexagone fait 45° avec le plan horizontal. On choisira sur l'épure la disposition telle que la projection ab coupe Ox à gauche de Oy . En outre, b est à gauche de a .

1° Déterminer les projections cotées de l'hexagone régulier ABCDEF dont les sommets sont énoncés dans le sens de parcours.

2° On découpe à l'intérieur de l'hexagone plein et opaque le triangle BDF de sorte qu'il reste trois triangles BCD, DEF et ABF.

3° Représenter ces trois triangles et leurs ombres portées sur le plan de comparaison; les rayons lumineux ont la direction et le sens du vecteur $\vec{UV}$ projeté en $u(2) v(1)$ parallèle à $\vec{Oy'}$: $uv = 2$.

356. — On donne le point A : $x = 0$; $y = 4$; $z = 4$.

1° Construire la projection d'un point B de cote zéro sachant que la distance AB vaut 9 centimètres et que cette projection a pour ordonnée -3 par rapport aux axes habituels $x'ox, y'oy$.

Le problème admet deux solutions, on choisira le point b à gauche du grand axe de la feuille.

2° Construire une échelle de pente du plan passant par AB et faisant 45° avec le plan de comparaison. Le problème admet deux solutions, on choisira celle pour laquelle la projection de l'horizontale de cote zéro coupe le petit axe à gauche du grand axe.

3° Déterminer la projection cotée d'un point C de ce plan tel que le triangle ABC est isocèle et rectangle en C. Le problème admet deux solutions. On choisira celui des deux points C qui a la cote la plus élevée.

4° Construire l'ombre portée par ce triangle sur le plan de comparaison; les rayons lumineux sont parallèles, ils viennent de la gauche et du haut, ils font 45° avec le plan de comparaison et leur projection est parallèle au petit axe de la feuille.

357. — Un terrain plan est incliné sur le plan horizontal. Son échelle de pente, projetée suivant une parallèle au grand axe de la feuille a pour pente $\frac{1}{2}$. L'horizontale de cote 10 est projetée suivant Ox , les cotes croissent vers le haut.

On veut creuser, dans ce terrain, une fosse dont le fond soit horizontal et ait la forme d'un carré ABCD dont on donne les coordonnées des sommets

$$\begin{array}{lll} A : x = 0 & ; & y = -1,5; \quad z = 6. \\ B : x = 1,5; & y = & 0; \quad z = 6. \\ C : x = 0 & ; & y = 1,5; \quad z = 6. \\ D : x = -1,5; & y = & 0; \quad z = 6. \end{array}$$

Les faces latérales de la fosse ont pour pente 2.

1° Représenter la projection de cette fosse.

2° Tracer, en rouge mixte, les horizontales du terrain et de la fosse des cotes 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13.

3° Tracer, en bleu, la coupe de la fosse suivant le plan vertical dont la trace est la médiatrice du segment oc .

CHAPITRE IX

PYRAMIDES ET PRISMES

- 1. *Représentation d'une pyramide.*
- 2. *Représentation d'un prisme.*

1

REPRÉSENTATION D'UNE PYRAMIDE

■ **169. Représentation d'un polyèdre.** — En utilisant la définition du polyèdre, on construit les projections cotées de ses sommets. Les projections des arêtes s'en déduisent. Il reste à effectuer la ponctuation en supposant que l'intérieur du polyèdre est opaque. En géométrie cotée, on suppose que l'observateur est au-dessus du plan de comparaison, aussi haut que l'on voudra et qu'il regarde ce plan. On en déduit que :

—> De plusieurs points situés sur une même verticale, seul celui qui a la plus forte cote est vu. Les autres sont cachés.

Cette règle suppose que le plan de comparaison est transparent. S'il est opaque, la règle subsiste pour les points à cote positive mais tous les points à cote négative sont cachés.

Les règles de ponctuation énoncées en géométrie de Monge, sont applicables.

—> 1^o Pour établir la ponctuation d'un polyèdre, on commence par déterminer la région du plan de projection dans laquelle se projettent toutes les faces. Le contour qui limite cette région est vu : c'est le **contour apparent** de la projection du polyèdre.

—> 2^o Quand un sommet est caché, toutes les arêtes ou portions d'arêtes qui en partent sont cachées jusqu'aux points où elles parviennent au contour apparent.

—> 3^o Deux arêtes qui se croisent en projection sans se couper dans l'espace ne peuvent pas être vues toutes les deux.

■ **170. Représentation d'un tétraèdre.** — Supposons que l'on connaisse les projections cotées des quatre sommets : a (1), b (2), c (3), d (4).

On trace les six arêtes. Le contour apparent est $abcd$. Les arêtes AB , BC , CD et AD sont donc vues (fig. 298). Il reste à punctuer les arêtes AC et BD . Considérons la verticale de pied p qui les rencontre. Elle coupe AC en un point dont la cote est voisine de 2 et elle coupe BD en un point de cote nettement très supérieure à 2. Par suite ac est cachée et bd est vue.

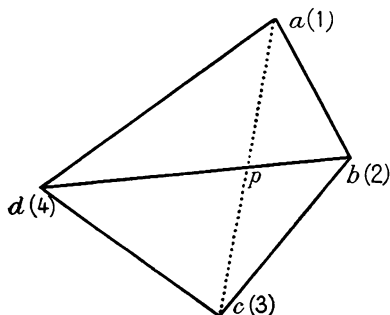


Fig. 298. — Tétraèdre quelconque.

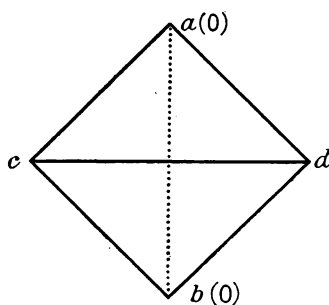


Fig. 299. — Tétraèdre régulier.

■ **171. Tétraèdre régulier.** — L'étude du tétraèdre régulier a été faite aux n^{os} 108, 109, 110. Les résultats sont applicables à la géométrie cotée.

EXEMPLE. — Représenter un tétraèdre régulier ayant deux arêtes opposées horizontales. On donne la longueur du côté.

Les arêtes opposées horizontales AB et CD sont orthogonales. On sait que le contour apparent est un carré. On peut donc construire le carré $acbd$. Supposons que la longueur du côté soit égale à 3 et que l'arête AB inférieure soit dans le plan de comparaison. La cote de

l'arête CD (n^o 110) est égal $bc = \frac{3\sqrt{2}}{2} = 2,12$ environ.

On en déduit la figure 299.

■ **172. Représentation d'une pyramide.** — On construit d'abord la projection de la base en effectuant un rabattement si cela est nécessaire. A l'aide des données on détermine le sommet soit par la hauteur et la position de son pied soit par les arêtes latérales. Il reste à punctuer.

EXEMPLES. — I. Représenter un tétraèdre $ABCD$ connaissant la base ABC dans le plan de comparaison et les longueurs des arêtes DA , DB , DC .

Soit abc la base dans le plan de comparaison (fig. 300). En rabattant la face DBC autour de BC , le point D vient en D_1 que l'on

peut construire puisque l'on connaît les longueurs bD_1 et cD_1 . On construit de même le rabattement D_2 de D provenant du rabattement de la face DAC autour de AC puisque l'on connaît :

$$aD_2 \text{ et } cD_2 (cD_1 = cD_2 = CD).$$

Par l'application de la règle du rabattement, la projection d de D se trouve sur la perpendiculaire abaissée de D_1 sur la charnière bc et aussi sur la perpendiculaire abaissée de D_2 sur la charnière ac . Cette projection d est donc au point de rencontre de ces deux perpendiculaires.

Il reste à trouver sa cote. On la trouve en utilisant la règle du triangle rectangle : le cercle de centre h_1 et de rayon h_1D_1 coupe la parallèle à bc , menée par d , en un point δ ; la distance $d\delta$ mesurée à l'échelle graphique est la cote du sommet D . On trouve : $d\delta = 1,9$.

Le problème admet deux solutions symétriques par rapport au plan de comparaison.

II. Représenter une pyramide régulière à base carrée reposant sur un plan incliné.

Sur la figure 301 on a supposé que le carré de base a un côté AB dans le plan de comparaison et que le plan du carré est incliné à 30° sur le plan de comparaison. On donne la hauteur $l = 4$ de la pyramide et le côté $AB = 3$.

Nous avons fait une projection frontale auxiliaire en prenant une ligne de terre xy perpendiculaire à ab . Le plan du carré devient debout. Sa trace frontale $a'p'$ fait

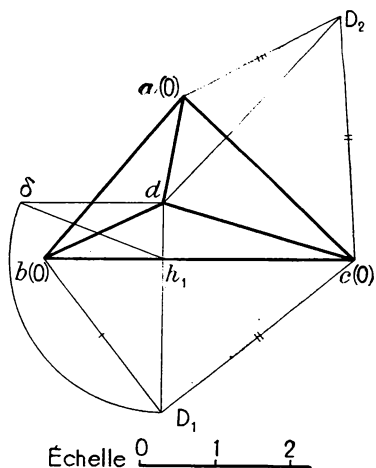


Fig. 300. — Tétraèdre dont la base est horizontale.

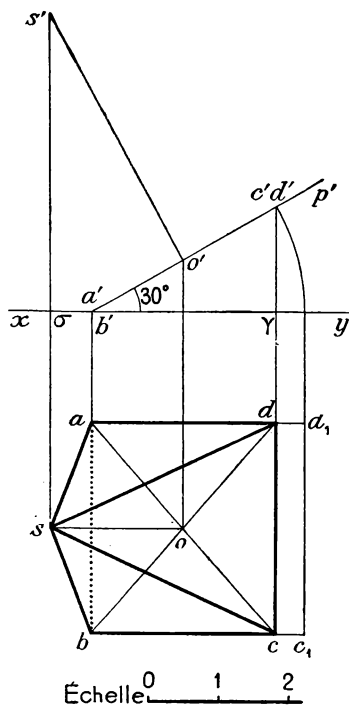


Fig. 301. — Pyramide régulière à base carrée.

2

REPRÉSENTATION D'UN PRISME

■ 173. **Représentation d'un prisme.** — On construit la projection cotée d'une base puis celle d'une arête latérale. Les autres arêtes latérales sont des vecteurs équipollents : cette propriété se conserve en projection.

EXEMPLE. — Un prisme a pour base le quadrilatère ABCD situé dans un plan défini par son échelle de pente P. Une arête latérale est $a(3) \alpha(6)$.

On a dessiné les vecteurs $\vec{b\beta}$, $\vec{c\gamma}$, $\vec{d\delta}$ équipollents à $\vec{a\alpha}$. On obtient ainsi les points $\beta(5)$; $\gamma(4)$; $\delta(7)$.

Le contour apparent est $\alpha abc \gamma \delta \alpha$ (fig. 302).

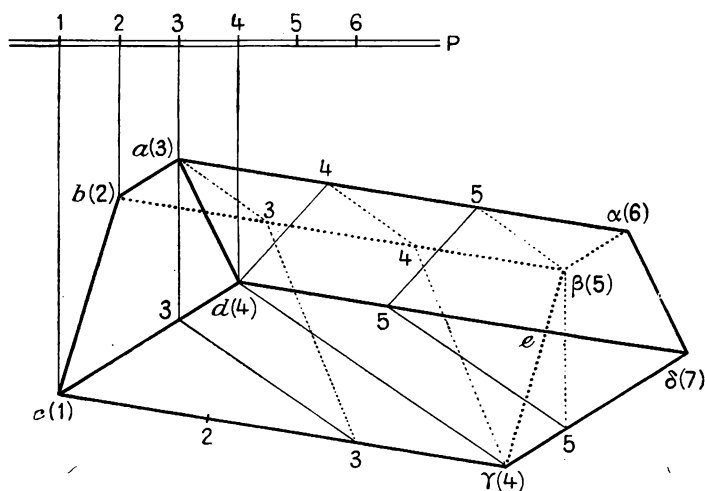


Fig. 302. — Représentation d'un prisme.

En comparant la cote 6 du point α et l'échelle de pente du plan, on constate que le point α est en dessous du plan. Le prisme est donc au-dessous du plan (P) et au-dessus du plan de l'autre base. Le point β est donc caché par le prisme. Les arêtes $\beta\alpha$, $\beta\gamma$ et βb sont cachées. La base ABCD a ses arêtes vues puisque le prisme est au-dessous de cette base et ne peut pas la cacher. Il reste à ponctuer l'arête $d\delta$. La portion δe est vue puisque $\beta\gamma$ est cachée. Il en résulte que toute l'arête $d\delta$ est vue.

On a tracé sur la figure les horizontales de cote 3, 4 et 5.

■ 174. Cube. — La représentation d'un cube se détermine comme celle d'un prisme. Nous signalerons seulement le cas où une diagonale AG est verticale.

EXEMPLE. — Représenter un cube dont la diagonale AG a pour projection $a(0) g(6)$.

On sait que le contour apparent (n° 113) est un hexagone régulier dont le côté vaut $\frac{AG}{3}\sqrt{2}$ et, ici, vaut $2\sqrt{2}$. On le construit donc aisément.

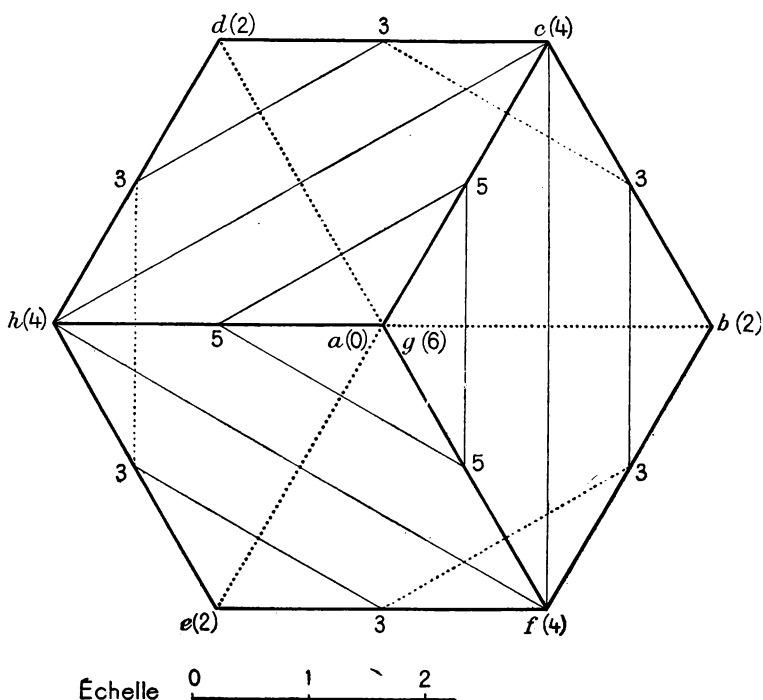


Fig. 303. — Cube à diagonale verticale.

ment. La ponctuation est immédiate puisque G est vu et A est caché (fig. 303). Les triangles BDE et FCH sont équilatéraux, égaux et dans les plans horizontaux de cotes 2 et 4.

On a tracé les horizontales de cotes : 3, 4 et 5.

EXERCICES

362. — Construire la projection d'un prisme connaissant sa base triangulaire $a(0) b(0) c(0)$ et l'arête $a(0) d(5)$.

363. — Construire la projection d'un prisme connaissant sa base triangulaire $a(0) b(0) c(0)$, la direction des projections des arêtes latérales, leur pente et leur longueur.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE IX

364. — Représenter une pyramide triangulaire connaissant sa base dans le plan de comparaison et connaissant les longueurs, égales, des arêtes latérales.

365. — Représenter une pyramide régulière ayant pour base un carré ABCD situé dans un plan incliné à 45° sur le plan de comparaison. On donne la projection cotée $a(0) b(0)$ du côté AB. La hauteur de la pyramide est égale à la demi-diagonale du carré. Déterminer la cote du sommet. (On prendra $ab = 4$ cm.)

366. — Construire un parallélépipède dont trois arêtes non situées deux à deux dans un même plan sont portées par trois droites données : l'une verticale, l'autre horizontale, la troisième quelconque.

367. — Construire un tétraèdre SABC connaissant sa base ABC dans le plan de comparaison et les valeurs des angles dièdres d'arêtes AB, BC, CA.

368. — Construire un tétraèdre régulier connaissant la projection cotée de son centre et sachant qu'un côté est porté par une droite verticale donnée.

369. — Dans un plan défini par son échelle de pente, on considère un carré dont deux sommets sont donnés dans le plan de comparaison. Représenter un prisme droit ayant pour base ce carré.

370. — Représenter la projection cotée d'un cube connaissant la projection cotée $a(0)$ d'un sommet, la projection cotée $a(0) b(1)$ d'une arête et sachant que la diagonale passant par A est verticale.

371. — Représenter un cube connaissant une arête $a(0) b(1)$ et le plan d'une face contenant AB.

372. — Représenter un cube connaissant un sommet $a(1)$ et une droite horizontale $h(0)$ qui porte une diagonale.

373. — Représenter un cube connaissant une arête $a(0) b(1)$ et la projection ac de la droite qui porte une autre arête.

ÉPURES

374. — On donne un tétraèdre par les coordonnées de ses sommets.

$$\begin{array}{lll} A : x = -4; & y = 0; & z = 5. \\ B : x = -6; & y = -7; & z = 3. \\ C : x = 4; & y = 8; & z = 1. \\ D : x = 0; & y = -3,5; & z = 1,5. \end{array}$$

1° Représenter le tétraèdre.

2° Déterminer son ombre propre et son ombre portée sur le plan de comparaison. Les rayons lumineux sont parallèles, ils viennent de la gauche et du haut. Leur projection est parallèle à Ox et l'intervalle vaut 2.

375. — On considère le prisme $a(0) b(0) c(0) d(5) e(5) f(5)$ défini par les coordonnées de ses sommets :

$$\begin{array}{llll} A : x = -3,6; & y = -3; & B : x = 0; & y = -6. \\ C : x = 2,4; & y = -4,2; & D : x = -1,2; & y = 6. \end{array}$$

Les arêtes latérales sont AD, BE et CF.

1° On considère le plan (P) dont l'échelle de pente a pour projection une droite parallèle au grand axe de la feuille. L'intervalle vaut 4. L'horizontale de cote 2 se projette suivant la droite $y = -1,2$; les cotes croissent vers le haut.

2° Représenter le tronc de prisme limité au plan de comparaison et au plan (P). Tracer les horizontales de sa surface latérale de cote 1, 2 et 3.

CHAPITRE X

PROJECTION DU CERCLE

- 1. *Projection d'un cercle de bout* (Géométrie de Monge.)
- 2. *Projection cotée d'un cercle* (Géométrie cotée).
- 3. *Problèmes sur la projection du cercle.*

1

PROJECTION D'UN CERCLE DE BOUT (Géométrie de Monge).

■ 175. **Rappel de propriétés.** — Soit un cercle (C) et un plan de projection (H), la projection étant orthogonale.

Si le plan du cercle est parallèle à (H), la projection du cercle est un cercle égal dont le centre est la projection du centre de (C).

Si le plan du cercle est perpendiculaire à (H), la projection du cercle est un segment de droite égal au diamètre du cercle et dont le milieu est la projection du centre du cercle.

Dans le cas général, nous avons démontré dans le cours de Géométrie (n° 290) que :

→ La projection orthogonale d'un cercle (C) sur un plan (H) est une ellipse (E) dont le grand axe est la projection sur (H) du diamètre de (C) parallèle à (H).

Nous nous proposons d'appliquer ces résultats à la construction graphique de la projection du cercle. Nous nous bornerons, en géométrie de Monge, au cas prescrit par le programme, à savoir le cas où le plan du cercle est de bout (ou vertical).

Puisqu'il faudra, en général, tracer des ellipses, nous rappelons les propriétés suivantes établies dans le cours de *Géométrie* (chap. XII).

1° *Tracé de l'ellipse par le procédé de la bande de papier.* — On connaît les droites Ox et Oy qui portent les axes de l'ellipse et les longueurs a et b des demi-axes. Sur le bord rectiligne d'une bande de papier on marque les points M, I et J tels que : $MI = b$

et $MJ = a$ (fig. 304, I), I étant entre M et J. En déplaçant la bande de façon que I décrive Ox et J décrive Oy , le point M décrit l'ellipse.

Le procédé manque de précision si les longueurs a et b sont peu différentes; dans ce cas on porte $MI = a$ et $MJ = b$ (fig. 304, II), le point M étant entre I et J.

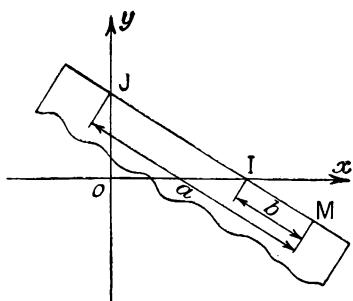


Fig. 304. I.

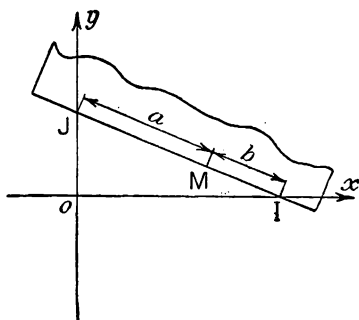


Fig. 304. II.

Construction de l'ellipse par la bande de papier.

2° Tracé de l'ellipse par affinité du cercle principal. — Si l'on trace le cercle principal de diamètre AA' porté par Ox , on sait que l'ellipse se déduit du cercle principal par l'affinité orthogonale d'axe Ox , le coefficient de réduction étant le rapport $\frac{b}{a}$.

On a (fig. 305) : $\frac{PM}{PM_1} = \frac{b}{a}$.

Dans les cas où le rapport $\frac{b}{a}$ est simple, on obtient des tracés rapides (voir *Cours de Géométrie*, n° 292).

● **REMARQUE.** — Il existe d'autres méthodes de tracés de l'ellipse. En particulier, la connaissance des foyers et du cercle directeur relatif à l'un deux donne des constructions simples d'un point de l'ellipse et de la tangente en ce point.

Mais ces constructions ne seront pas utilisées dans ce chapitre.

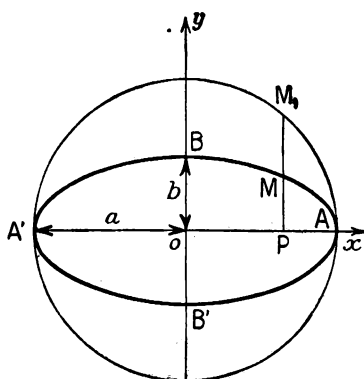


Fig. 305. — Construction de l'ellipse par affinité du cercle.

■ **176. Projections d'un cercle horizontal.** — Soit un cercle horizontal de centre (o, o') et de rayon R .

La projection horizontale (fig. 306) est le cercle (c) de centre o et de rayon R .

La projection frontale est le segment de droite $a'b'$ de longueur $2R$ et de centre o' .

On a indiqué un point (m, m') du cercle et la tangente $(mt, m't')$ en ce point.

Notons que tout point m' du segment $a'b'$ est la projection frontale de deux points du cercle (m, m') et (m_1, m') symétriques l'un de l'autre par rapport au plan de front du centre. Au contraire tout point m de (c) est la projection horizontale d'un seul point (m, m') du cercle.

On ferait des remarques analogues pour un cercle frontal (fig. 307).

■ **177. Projections d'un cercle dans un plan de bout non horizontal.** — Soit un plan de bout (Q') et, dans ce plan, un cercle (C) de centre (o, o') et de rayon R .

1° La projection frontale est le segment de droite $c'd'$, de milieu o' et de longueur $c'd' = 2R$.

2° La projection horizontale est une ellipse dont nous allons déterminer les axes (fig. 308).

Le grand axe est la projection du diamètre de bout du cercle, donc la projection du diamètre projeté frontalement en o' ; sa projection horizontale est aob : $oa = ob = R$.

Le petit axe est projeté suivant la perpendiculaire à ab . Comme le diamètre AB est parallèle au plan de projection, le petit axe est la projection du diamètre du cercle qui est perpendiculaire à AB dans l'espace (en vertu des propriétés connues sur la projection orthogonale d'un angle droit). Ce diamètre est donc frontal : c'est le diamètre $(cd, c'd')$.

L'ellipse est déterminée par ses sommets : a, b, c, d .

3° Construction d'un point courant. — Les axes de l'ellipse étant construits, il est possible de trouver autant de points que l'on voudra par l'une des constructions graphiques rappelées au n° 175. Nous allons montrer que l'usage des procédés de la géométrie descriptive conduit à des tracés simples.

Donnons-nous la projection frontale m' d'un point du cercle; ce point m' appartient au segment $c'd'$. Par une rotation

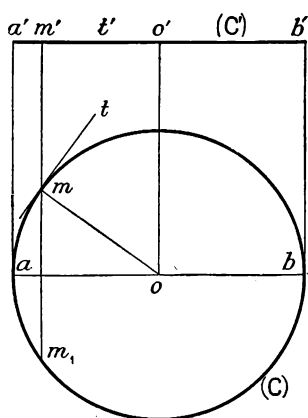


Fig. 306.
Cercle horizontal.

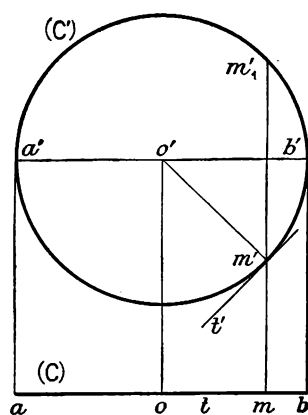


Fig. 307.
Cercle frontal.

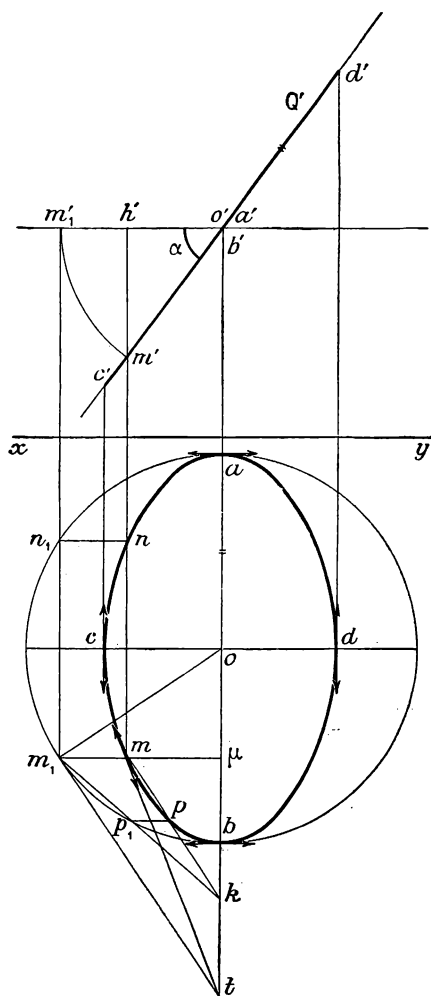


Fig. 308.
Cercle dans un plan de bout.

autour de l'axe de bout $(ab, a'b')$ nous pouvons amener le cercle à être horizontal, le point m' vient en m'_1 et m'_1 se rappelle en m_1 sur le cercle de diamètre ab . La rotation inverse fournit la projection horizontale m .

Le problème admet deux solutions (m, m') et (n, n') symétriques l'une de l'autre par rapport au plan de front du centre. Cette construction est d'ailleurs la construction par affinité car l'on a :

$$\frac{\mu m}{\mu m_1} = \frac{o'h'}{o'm'_1} = \frac{o'h'}{o'm'} = \cos \alpha$$

en appelant α l'angle aigu du plan du cercle et du plan horizontal.

4° Construction de la tangente au point courant. — L'opération précédente (rotation autour d'un axe de bout) est aussi un rabattement. Ayant rabattu un point m en m_1 , on peut, pour avoir d'autres points, utiliser les alignements. On prendra un point p_1 sur le cercle principal; la droite m_1p_1 coupe la charnière ab en k ; la droite km coupe la perpendiculaire à la charnière menée par p_1 en un point p qui est un point de l'ellipse.

Si le point p_1 tend vers le point m_1 en restant sur le cercle principal, le point p tend vers le point m en restant sur l'ellipse. La droite m_1p_1 tend vers la tangente au cercle principal en m_1 . Cette tangente coupe ab en t . Donc la droite mp a une position limite qui est la droite mt . C'est la tangente à l'ellipse en m .

● **REMARQUE.** — L'étude des projections d'un cercle situé dans un plan vertical conduit à des tracés et à des conséquences analogues.

EXERCICES

376. — Construire les projections d'un cercle connaissant son centre (o, o') et une tangente (d, d') ; la projection d' passe par o' .

377. — Construire les projections d'un cercle connaissant l'axe (d, d') du cercle et un point (m, m') du cercle.

On rappelle que l'axe d'un cercle est la perpendiculaire à son plan menée par son centre. On supposera que l'axe est horizontal.

378. — Construire les projections d'un cercle connaissant un diamètre vertical $(ab, a'b')$, la projection frontale m' d'un point et la projection frontale m'' de la tangente en ce point.

379. — On donne un cercle par son centre (o, o') , son rayon R et son plan qui est vertical. Trouver les projections d'un point de ce cercle de cote donnée.

2

PROJECTION COTÉE D'UN CERCLE

■ 178. **Projection d'un cercle horizontal.** — Soit un cercle de centre o (5), de rayon $R = 4$ unités graphiques, situé dans le plan horizontal de cote 5. Sa projection est le cercle de centre o et de rayon 4. Sur la figure 309 on a marqué un point m (5) du cercle et la tangente m (5) t (5) en ce point.

■ 179. **Projection d'un cercle vertical.** — Soit un cercle de centre o (3) de rayon $R = 4$ unités graphiques (situé dans le plan vertical dont la trace est od). Sa projection est le segment de droite ab de longueur 8 et de milieu o . Donnons-nous la projection m d'un point de cercle et cherchons sa cote.

Nous utiliserons une projection frontale auxiliaire en prenant la ligne de terre xy confondue avec ab et en rapportant les cotes au plan horizontal du centre. La projection frontale du cercle (fig. 310) est le cercle de diamètre $a'b'$ et le point m se rappelle en m'_1 ou en m'_2 . Les cotes des points du cercle qui se projettent en m sont donc :

$$3 \pm m'm'_1.$$

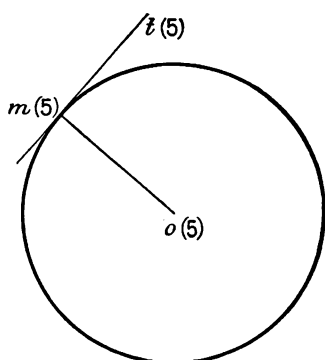
A l'échelle du dessin on trouve $mm'_1 = 3$.

En menant la tangente en m'_1 au cercle jusqu'en t sur xy , on obtient le point t (3) situé sur la tangente en M au cercle.

■ 180. **Projection cotée d'un cercle situé dans un plan défini par son échelle de pente.** — Soit le cercle de centre o (2), de rayon donné R et situé dans un plan, passant par o (2) et défini par son échelle de pente P (fig. 311).

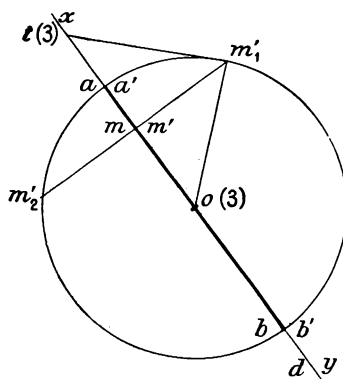
Nous nous ramènerons immédiatement au cas de la géométrie de Monge en faisant une projection frontale auxiliaire de façon que le plan soit de bout.

Prenons la ligne de terre suivant la projection de P et rapportons les cotes au plan horizontal du centre du cercle. La projection frontale du centre est en o' sur xy , la projection frontale du point e (3) du plan est en e' tel que ee' soit égale à l'unité graphique. Le plan est rendu de bout et sa trace frontale est $o'e'$.



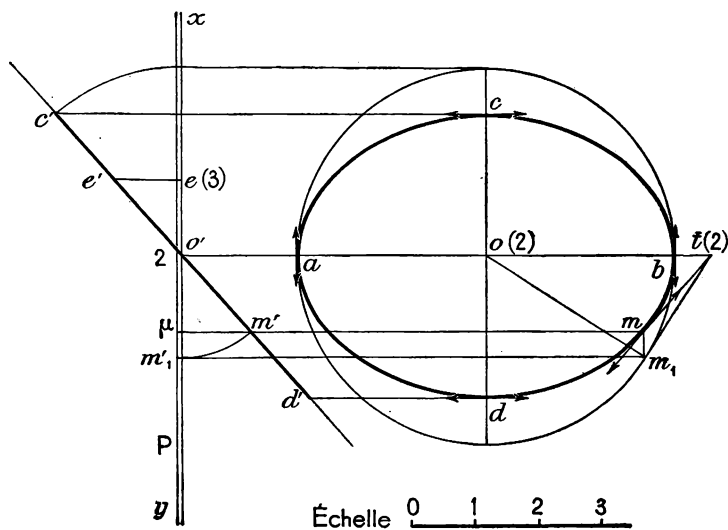
Échelle 0 1 2 3

Fig. 309.
Cercle horizontal.



Échelle 0 1 2 3

Fig. 310.
Cercle vertical.



Échelle 0 1 2 3

Fig. 311.
Projection d'un cercle quelconque.

Nous faisons alors les constructions indiquées au n° 177.

1° *La projection horizontale* est une ellipse dont le grand axe est porté par l'horizontale du point o (2) et dont la longueur est :

$$ab = 2R.$$

Les sommets du grand axe sont a (2) et b (2) tels que :

$$oa = ob = R.$$

Le petit axe est porté par la perpendiculaire à ab en o . Les sommets c et d de ce petit axe s'obtiennent en rappelant les points c' et d' de la projection frontale auxiliaire tels que :

$$o'c' = o'd' = R.$$

2° *Construction du point courant.* — On prend un point m' du segment $c'd'$; par rotation autour de la droite de bout ($ab, a'b'$) il vient en m'_1 sur xy . On rappelle m'_1 en m_1 sur le cercle principal et la rotation inverse conduit au point m dont la cote est mesurée à l'échelle graphique en $\mu m'$.

3° *Construction de la tangente au point courant.* — En raisonnant comme au n° 177, on est conduit à la marche suivante :

Pour avoir la tangente en m , on mène la tangente en m_1 au cercle principal jusqu'en t sur la charnière ab et l'on obtient un point t (2) de la tangente cherchée.

EXERCICES

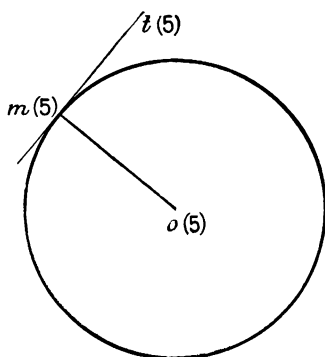
380. — Construire la projection d'un cercle connaissant son centre o (5) et une tangente (D) donnée par les projections cotées de deux de ses points.

Cas où (D) est horizontale : h (3).

381. — Construire la projection d'un cercle connaissant son axe a (0) b (1) et un point m (5) du cercle.

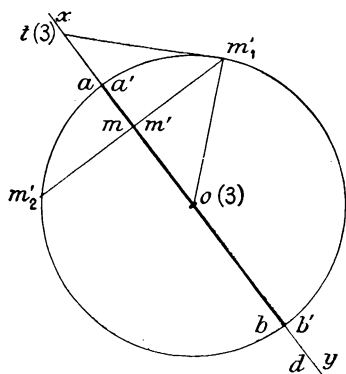
382. — On donne un cercle par son centre, son plan et son rayon. Trouver la projection d'un point du cercle connaissant sa cote.

383. — Construire la projection du cercle inscrit dans le triangle a (0) b (0) c (4).



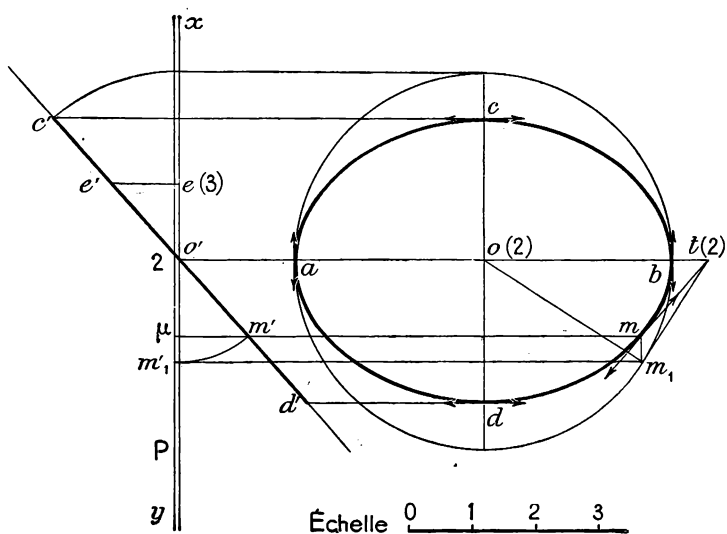
Échelle 0 1 2 3

Fig. 309.
Cercle horizontal.



Échelle 0 1 2 3

Fig. 310.
Cercle vertical.



Échelle 0 1 2 3

Fig. 311.
Projection d'un cercle quelconque.

3

PROBLÈMES SUR LA PROJECTION DU CERCLE

Nous traiterons les problèmes qui suivent aussi bien en géométrie de Monge qu'en géométrie cotée.

■ 181. Problème I. — Intersection d'un cercle et d'une droite de son plan.

Il serait maladroit de construire la projection du cercle et de déterminer les points d'intersection de l'ellipse et de la projection de la droite. Il en est de même pour les problèmes qui suivront.

La méthode consiste à rabattre le plan du cercle sur un plan horizontal. La construction est alors immédiate et l'on effectue le relèvement.

■ 182. Problème II. — Mener à un cercle les tangentes issues d'un point donné de son plan.

On rend le plan du cercle horizontal par rabattement, on fait la construction nécessaire puis on relève.

EXEMPLE. — Mener à un cercle, situé dans un plan de bout, des tangentes par un point donné de ce plan.

Soit le cercle de centre (o, o') , de rayon R , dans le plan de bout (Q') et (a, a') le point donné.

Par rabattement sur le plan horizontal du centre (fig. 312), on obtient le cercle (C_1) de centre O et de rayon R . Le point (a, a') se rabat en a_1 . De a_1 on mène les tangentes a_1m_1 et a_1n_1 au cercle. Le relèvement conduit aux points (m, m') et (n, n') qui sont les points de contact des tangentes cherchées.

On obtient ainsi les tangentes et les points de contact sans avoir à dessiner l'ellipse projection du cercle.

Si le problème était posé en géométrie cotée, on le ramènerait au cas étudié par une projection frontale auxiliaire.

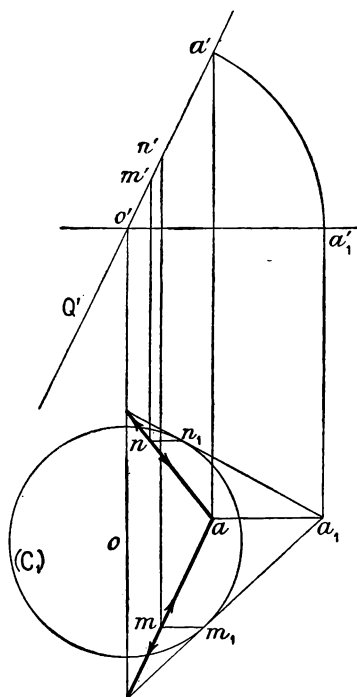


Fig. 312.

■ 183. Problème III. — Mener à un cercle les tangentes parallèles à une direction donnée de son plan.

On résout ce problème en faisant, encore, un rabattement sur un plan horizontal.

EXEMPLE. — Soit un cercle dans un plan défini par l'échelle de pente P , son centre $o(3)$, son rayon R et la direction $o(3)d(4)$ du plan (fig. 313).

Par rabattement autour de l'horizontale $h(3)$, on obtient le cercle de centre o et de rayon R . Le point $d(4)$ se rabat en D par la règle du triangle rectangle. On mène au cercle rabattu les tangentes parallèles à oD ; soit M et N les points de contact extrêmes du diamètre perpendiculaire à oD . Ces tangentes coupent la charnière respectivement en U et V . Leurs relèvements sont donc les parallèles à od menées par U et V . Il suffit pour relever M et N de mener par M et N les perpendiculaires à la charnière jusqu'en m et n sur les droites précédentes.

Les tangentes cherchées sont projetées en mU et nV , symétriques l'une de l'autre par rapport à o , évidemment. Les cotes de U et de V sont égales à 3. On détermine les cotes de m et de n à l'aide de l'échelle de pente.

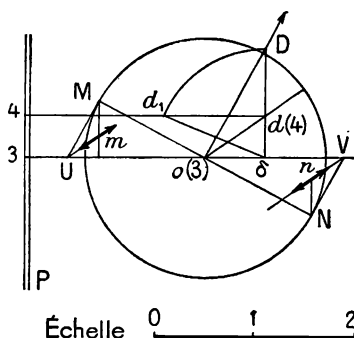


Fig. 313.

■ 184. Problème IV. — Mener à un cercle les tangentes parallèles à un plan donné (Q).

Les tangentes cherchées, devant être dans le plan (P) du cercle et être parallèles au plan (Q), seront parallèles à l'intersection (D) de (P) et de (Q).

Inversement, si les plans (P) et (Q) se coupent suivant une droite (D), les tangentes au cercle parallèles à (D) seront parallèles au plan (Q).

On est alors ramené au problème III.

EXERCICES

384. — On donne un cercle par son plan, son centre et son rayon. Mener dans ce cercle, une corde de longueur donnée passant par un point donné de son plan (géométrie de Monge et géométrie cotée).

385. — Mener à un cercle défini par son plan, son centre et son rayon des tangentes par un point donné du plan (géométrie cotée).

386. — Mener à un cercle défini par son plan vertical, son centre et son rayon des tangentes parallèles à une direction donnée de son plan (géométrie de Monge).

EXERCICES SUR LE CHAPITRE X

387. — Mener à un cercle défini par son plan, son centre et son rayon des tangentes parallèles à un plan donné (géométrie cotée).

388. — Mener par une droite graduée un plan tangent à un cercle défini par les projections cotées de trois de ses points (géométrie cotée).

389. — On définit un cercle dans un plan de bout donné par son centre et son rayon. Construire les projections des tangentes au cercle qui font un angle donné avec le plan horizontal (géométrie de Monge).

390. — Construire les projections des centres d'homothétie et de l'axe radical de deux cercles situés dans un même plan (P); chacun des cercles est défini par son centre et son rayon (géométrie cotée et géométrie de Monge en supposant (P) vertical).

391. — Mener à un cercle défini par son plan, son centre et son rayon des tangentes de pente donnée (géométrie cotée).

392. — 1° Mener à un cercle défini par son plan de bout, son centre et son rayon, des tangentes parallèles à un plan vertical donné (V) (géométrie de Monge).

2° Même question en remplaçant le plan (V) par le premier ou le second bissecteur.

393. — On donne un point A (a, a') et une droite D (d, d'). Trouver les projections d'une droite, passant par A, rencontrant (D) et rencontrant aussi un cercle (C) donné dans un plan de bout (P) par son centre et son rayon.

Même question en géométrie cotée en donnant l'échelle de pente de (P).

394. — Construire une droite de direction donnée rencontrant une droite donnée D (d, d') et un cercle (C) donné, dans un plan de bout (P), par son centre et son rayon.

Même question en géométrie cotée en donnant l'échelle de pente de (P).

395. — Construire les projections d'une droite située dans un plan donné vertical (P) et sur laquelle deux cercles de ce plan, définis chacun par leur centre et leur rayon, découpent des cordes de longueurs données.

396. — Dans un plan donné de bout (P), on considère deux points O et A. Tracer la projection horizontale de l'hexagone régulier de centre O et dont un sommet est A. Tracer la projection horizontale du cercle circonscrit.

397. — Construire la projection cotée d'un cercle connaissant les points $a(0)$ et $b(1)$ où les tangentes sont parallèles à un plan vertical donné (V).

398. — Construire le centre du cercle tangent à une droite de bout donnée (d, d') et passant par deux points donnés (a, a') et (b, b') tels que la droite AB rencontre la droite (D).

399. — 1° Déterminer le plan d'un cercle de rayon donné R, de centre donné $o(1)$, sachant que le cercle rencontre deux horizontales données $h(2)$ et $k(4)$. Nombre de solutions.

2° Déterminer le plan d'un cercle, de centre donné $o(1)$, sachant que ce plan est parallèle à la droite horizontale $d(0)$ et que le cercle rencontre les deux horizontales $h(3)$ et $k(3)$ de même cote. Évaluer le rayon du cercle.

3° Déterminer le centre d'un cercle sachant que le cercle rencontre les deux horizontales $h(3)$ et $k(3)$, qu'il rencontre aussi les deux horizontales $d(4)$ et $\delta(4)$ et que son plan est parallèle à un plan vertical donné (V).

QUESTIONS DE BACCALAURÉAT

I. Géométrie de Monge.

400. — Trouver les angles d'un plan $P\alpha Q'$ avec un plan de profil.

401. — On donne trois points : A sur xy , B de cote nulle, C d'éloignement nul. Trouver et construire le lieu des points de l'espace équidistants de ces trois points.

402. — Un plan est défini par ses traces. On prend, dans ce plan, un point (m, m') . Par ce point, dans le plan donné, on mène deux droites orthogonales, l'une d'elles étant horizontale. On porte sur chaque droite, à partir de M, et dans les deux sens, une même longueur donnée a . Trouver les projections des quatre points ainsi déterminés.

403. — On donne la trace horizontale d'un plan et l'angle α que fait le plan avec le plan horizontal de projection.

1° Construire la trace frontale du plan.

2° Trouver la distance d'un point de la ligne de terre au plan.

404. — Par un point O de la ligne de terre, on trace, dans le plan horizontal de projection, une droite OA faisant l'angle aigu α avec la ligne de terre.

1° Construire une droite OB du plan frontal de projection connaissant l'angle $\widehat{AOB} = \theta$.

2° En supposant $\theta = 60^\circ$ et $\alpha = 45^\circ$, calculer l'angle de la droite OB avec le plan horizontal.

405. — Soit un plan $P\alpha Q'$ défini par ses traces; la trace horizontale de P et la trace frontale $\alpha Q'$ font respectivement, avec la ligne de terre xy , les angles aigus θ et φ .

1° Construire, par rabattement du plan $P\alpha Q'$ sur le plan horizontal, l'angle β que font entre elles, dans l'espace, les traces du plan.

2° Calculer β si $\theta = \varphi = 45^\circ$.

3° Plus généralement, trouver la relation qui lie $\cos \beta$, $\cos \theta$ et $\cos \varphi$.

4° Construire la vraie grandeur du rectiligne γ du dièdre d'arête αP dans le trièdre défini par les demi-droites αP , xy , $\alpha Q'$. Calculer $\sin \gamma$ lorsque $\theta = \varphi = 45^\circ$. En déduire γ en degrés. Plus généralement, trouver la relation qui lie $\sin \beta$, $\sin \varphi$ et $\sin \gamma$.

406. — Une droite (d, d') coupe la ligne de terre xy au point (a, a') . On donne les angles aigus : $\widehat{yad} = \alpha$ et $\widehat{ya'd'} = \beta$.

1° Construire, par rabattement, l'angle γ que fait la droite (d, d') avec la ligne de terre, dans l'espace.

2° Calculer γ lorsque $\alpha = 45^\circ$ et $\beta = 60^\circ$. Plus généralement, trouver la relation qui lie $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg} \beta$ et $\operatorname{tg} \gamma$.

3° Calculer α et β sachant que $\gamma = 60^\circ$ et que $\alpha + \beta = 90^\circ$.

407. — On donne un plan (P) dont les traces sont confondues, sur l'épure, avec une droite faisant l'angle α avec la ligne de terre et on donne aussi un autre plan (Q) dont les traces sont confondues sur l'épure, avec une droite, faisant l'angle β avec la ligne de terre.

1° Construire les droites d'intersection de ces plans avec le deuxième bissecteur.

2° Évaluer, en fonction de α et de β , les angles des plans (P) et (Q) ainsi que les angles que font ces plans avec la ligne de terre.

408. — On considère un plan debout (P). Un triangle ABC, situé dans ce plan, se projette horizontalement, suivant un triangle équilatéral. L'un des côtés AB est de bout. Le triangle ABC est la base d'un tétraèdre SABC, dont la face SAB est un triangle équilatéral situé dans le plan de profil de A. Tracer les projections du tétraèdre SABC.

409. — On définit un cercle par son plan, son centre et son rayon.

1° Trouver les points du cercle qui sont dans le premier bissecteur.

2° Construire les projections d'un point de ce cercle dont la cote et l'éloignement sont dans un rapport donné k .

3° Construire les projections des tangentes au cercle aux points obtenus au 1° et au 2°.

410. — Dans un plan de profil, on donne un cercle par son centre et son rayon. Construire les projections d'un segment rectiligne, parallèle à la ligne de terre, de longueur donnée, et dont les extrémités sont l'une sur le cercle, l'autre dans un plan donné par ses traces.

II. Géométrie cotée.

411. — Un plan (P), donné par son échelle de pente, fait 60° avec le plan de comparaison.

1° Tracer, dans ce plan, un triangle équilatéral ABC de 6 cm de côté tel que la hauteur issue de A est horizontale.

2° Ce triangle est la base de deux tétraèdres réguliers, symétriques l'un de l'autre, par rapport au plan (P). Représenter l'hexaèdre constitué par la réunion des deux tétraèdres.

412. — On considère un tétraèdre régulier de sommets A, B, C, D. Les points A et B sont dans le plan de comparaison et leur distance est 4 cm ; le sommet C a pour cote $2\sqrt{2}$ cm.

1° Déterminer la projection cotée du tétraèdre.

2° Construire et calculer les angles que font avec le plan horizontal la face ABD et l'arête CD.

3° Calculer le volume et la surface totale de ce tétraèdre.

413. — On donne trois points A, B, C par leurs projections cotées ; a (1), b (2) et c (3). Le triangle abc est équilatéral et a pour côté 4 cm. On construit le parallélogramme ABCD dont deux côtés consécutifs sont AB et BC.

1° Trouver la projection cotée du sommet D.

2° Rabattre le plan du parallélogramme ABCD sur le plan horizontal de cote 2.

3° Dédire de ce rabattement la surface du parallélogramme ABCD et vérifier le résultat à l'aide du théorème relatif à la projection d'une aire plane.

4° Calculer le volume du tronc de prisme $ABCDabcd$.

414. — Un trièdre $SABC$ a pour faces $\widehat{BSC} = 90^\circ$; $\widehat{CSA} = b$; $\widehat{BSA} = c$.

On désigne les dièdres par $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$. L'unité graphique est le centimètre.
Le plan de la face BSC est le plan de comparaison.

1° L'intervalle de l'arête SA vaut 2. La projection sa de SA est telle que l'angle $\widehat{asb}$ vaut 30° . Construire la grandeur des faces b et c et des dièdres $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$.

2° On donne les dièdres $\hat{B}$ et $\hat{C}$. Construire le trièdre.
Évaluer l'intervalle de SA .

3° On donne $\hat{C}$ et b . Construire le trièdre.

4° Calculer c et b en fonction de B et de C et inversement.

TABLE

PREMIÈRE PARTIE

GÉOMÉTRIE DE MONGE

CHAPITRE PREMIER

Le point. — La droite.

1. Épure du point	1
2. Épure de la droite	10
3. Problèmes sur la droite.....	17
<i>Note sur les épreuves</i>	35
<i>Exercices sur le Chapitre premier</i> ..	36

CHAPITRE II

Le plan.

1. Épure du plan	38
2. Plans remarquables	46
3. Lignes de pente.....	52
4. Résumé	58
<i>Exercices sur le chapitre II</i>	60

CHAPITRE III

Intersection de droites et de plans.

1. Droites et plans parallèles	61
2. Intersection de droites et de plans	64
3. Applications	72
4. Ponctuation	76
5. Droites et plans perpendiculaires	81

6. Perpendiculaire commune à deux droites.....	87
<i>Exercices sur le chapitre III</i>	91

CHAPITRE IV

Transformation des projections.

1. Changement de plan	95
2. Rotation.....	109
3. Rabattement	123
4. Problèmes de distances et d'angles.....	135
<i>Exercices sur le chapitre IV</i>	149

CHAPITRE V

Pyramides et prismes.

1. Représentation d'une pyramide.	153
2. Représentation d'un prisme.....	158
3. Tétraèdre régulier et cube	160
<i>Exercices sur le chapitre V</i>	166

Textes d'épures.

2 Textes sur la droite.....	37
2 Textes sur la droite et le plan.....	94
2 Textes sur les polygones plans....	152
4 Textes sur les polyèdres	167

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE COTÉE

CHAPITRE VI

Le point. — La droite.

1. Épure du point.	169
2. Projection verticale auxiliaire.	172
3. Épure de la droite.	175
4. Problèmes sur la droite.	178
<i>Exercices sur le chapitre VI</i>	183

CHAPITRE VII

Le plan.

1. Représentation du plan	184
2. Droites et plans parallèles	190
3. Intersection de droites et de plans	192
4. Applications	197
5. Droites et plans perpendiculaires	200
<i>Exercices sur le chapitre VII</i>	205

CHAPITRE VIII

Transformation des projections.

1. Changement de plan. Rotation.	208
2. Rabattement	210

3. Problèmes de distances et d'angles	214
<i>Exercices sur le chapitre VIII</i>	221

CHAPITRE IX

Pyramides et prismes.

1. Représentation d'une pyramide.	223
2. Représentation d'un prisme.	227
<i>Exercices sur le chapitre IX</i>	229

CHAPITRE X

Projection du cercle.

1. Projection d'un cercle de bout (Géométrie de Monge)	230
2. Projection cotée d'un cercle (Géométrie cotée)	236
3. Problèmes sur la projection du cercle	240
<i>Exercices sur le chapitre X</i>	242

Textes d'épures.

5 Textes (droites et plans)	206
3 Textes (droites et plans)	222
2 Textes (polyèdres)	229

Questions de Baccalauréat.

1. Géométrie de Monge	243
2. Géométrie cotée	244

IMPRIMÉ EN FRANCE
PAR

BRODARD - TAUPIN
IMPRIMEUR - RELIEUR
COULOMMIERS - PARIS
58196 - VIII - 2 - 5499
DÉPOT LÉGAL N° 3614
1^{er} TRIMESTRE 1962